

Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung

von

Walther Unsin

aus

Nesselwang



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0046

Lie - Algebren mit Idealisatorbedingung

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Walther Unsin

aus

Nesselwang

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 26. Januar 1972

Dekan: Universitätsprofessor Dr. K. Jacobs

1. Berichterstatter: Universitätsdozent Dr. H. Heineken

2. Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. W. Specht

I N H A L T

	Seite
Einleitung	1
Bezeichnungen und Begriffe	5
I. Allgemeine Sätze	
§1. Hilfsmittel	7
§2. Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung	10
§3. Nilpotenz-Eigenschaften von Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung	17
II. Lie-Algebren mit trivialem Zentrum und Idealisatorbedingung	
§1. Konstruktion	23
§2. Nachweis von $Z(L) = 0$	26
§3. Kommutativität von L'	29
§4. Die Idealisatorbedingung in L	30
III. Isomorphiebetrachtungen	
§1. Isomorphie der konstruierten Lie-Algebren	39
§2. Direkte Produkte von Lie-Algebren	47
Literaturverzeichnis	72

EINLEITUNG

In der Theorie der unendlichen Gruppen gibt es zwei wichtige Verallgemeinerungen der Nilpotenzeigenschaft: die Hyperzentralität und das Erfüllen der Normalisatorbedingung, zwei Eigenschaften, die bei endlichen Gruppen zur Nilpotenz äquivalent sind. Mit der Definition dieser Begriffe stellt sich sofort die Frage nach ihrer Beziehung untereinander. Während es sehr leicht einzusehen ist, daß eine hyperzentrale Gruppe auch die Normalisatorbedingung erfüllt, ist die Umkehrung dieses Satzes i.allg. falsch, wie H.Heineken und I.J.Mohamed in [5] durch die Konstruktion einer Gruppe mit Zentrum 1, die die Normalisatorbedingung erfüllt, gezeigt haben.

Da sich nun die Begriffe "Normalisatorbedingung" und "hyperzentral" unmittelbar auf Lie-Algebren übertragen lassen (bei Lie-Algebren sprechen wir von "Idealisatorbedingung"), kann man fragen, wie es um die Übertragbarkeit der eben erwähnten gruppentheoretischen Resultate auf Lie-Algebren bestellt ist. Diese Frage ist in zweifacher Hinsicht interessant. Erstens zeigen sich bei ihrer Untersuchung Möglichkeiten und Grenzen für die Übertragbarkeit gruppentheoretischer Sätze in die Theorie der Lie-Algebren. Zweitens ist es, auch bei isolierter ringtheoretischer Betrachtungsweise, wünschenswert zu wissen, welcherart die Zusammenhänge zwischen der "Idealisatorbedingung" und der "Hyperzentralität" sind.

Man erkennt rasch, daß eine hyperzentrale Lie-Algebra die Idealisatorbedingung erfüllt.

Im Hinblick auf die Umkehrung dieses Satzes nehmen wir, geleitet von [5], folgende Konstruktionen vor:

Es sei $p > 2$ eine Primzahl und $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Wir definieren eine assoziative Algebra F über $\mathbb{Z}_p$:

$$F = \left(a, x_i \left| \begin{array}{l} a^2 = axa = 0 \text{ für alle } x \in F \\ x_{i+1}^{n_{i+1}} = x_i + a, i \in \mathbb{N} \\ x_1^{n_1} = (x_1 + a)^{n_1} = 0 \end{array} \right. \right)$$

Mit der Festsetzung $z_i = x_i + a$ erzeugen die Elemente z_i , $i \in N$, eine Unteralgebra L der Lie-Algebra von F .

Diese Lie-Algebra L hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

1. $Z(L) = 0$, d.h. L ist nicht hyperzentral.
2. L erfüllt die Idealisatorbedingung.
3. $(L')' = 0$.

Damit ist wie in der Gruppentheorie gezeigt, daß eine Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt, nicht notwendig hyperzentral ist.

Mit dieser Definition tritt sofort die "Isomorphiefrage" auf, d.h. die Frage, unter welchen Umständen die durch zwei Folgen natürlicher Zahlen definierten Lie-Algebren isomorph sind. Die Untersuchung zeigt, daß dies - selbstverständlich bei gleichen Skalarenkörpern - nur dann der Fall ist, wenn die definierenden Folgen gleich sind.

Führt man analoge Untersuchungen bei Gruppen durch, so erweist es sich, daß dort bereits unter etwas allgemeineren Voraussetzungen Isomorphie erzielt werden kann.

Der Unterschied entsteht dadurch, daß bei Lie-Algebren nicht jede Potenz einer inneren Derivation wieder eine innere Derivation ist.

Eine weitere Eigenschaft der in [5] angegebenen Gruppe ist die Nilpotenz jeder eigentlichen Untergruppe. Hier treten nun weitere Unterschiede auf. Analog zur Gruppentheorie - dort wurde der entsprechende Satz von Plotkin bewiesen - zeigen wir die lokale Nilpotenz jeder Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt. Damit muß man sich aber im vorliegenden Fall begnügen. Man kann nicht noch überdies die Nilpotenz jeder eigentlichen Unteralgebra fordern. Dem steht ein Satz im Weg, wonach eine Lie-Algebra K , die der Idealisatorbedingung genügt, für die $K' \neq K$ ist, und in der jede eigentliche Unteralgebra nilpotent ist, stets hyperzentral ist.

Ein Grund für diesen Unterschied ist in folgender Tatsache zu sehen: Der Schluß auf die Hyperzentralität von K wird entscheidend dadurch ermöglicht, daß aus $a \in (x, N)$, $a \notin N$, $K' \leq N$, folgt $x \in (a, N)$.

Man kann nämlich aus $\alpha x \in (a, N)$, $\alpha \neq 0$, folgern, daß $x \in (a, N)$. Bei Gruppen kann ein entsprechender allgemeiner Satz nicht aufgestellt werden. Dazu wäre nötig, daß man bei einer Gruppe G aus $x^n \in H$, $n > 1$, $G' \in H$, stets auf $x \in H$ schließen könnte. G/H müßte dann torsionsfrei sein, was aber i.allg. nicht zutrifft.

Neben einer Untersuchung der Struktur der einzelnen Lie-Algebren, wie sie in dieser Arbeit definiert werden, taucht ein weiteres Problem auf.

Von Gruppen ist durch die Abhandlung [5] bekannt, daß das direkte Produkt zweier Gruppen die Normalisatorbedingung nicht zu erfüllen braucht, auch wenn die Gruppen selbst sie erfüllen.

Wir stehen deshalb vor der Aufgabe, zu zeigen, wann das direkte Produkt aus zwei der konstruierten Lie-Algebren die Idealisatorbedingung erfüllt.

Zu diesem Zweck wird zunächst unabhängig von den speziellen Konstruktionen ein Kriterium dafür gesucht, daß das direkte Produkt $L_1 \times L_2$ von Lie-Algebren L_1, L_2 , die der Idealisatorbedingung genügen, seinerseits die Idealisatorbedingung erfüllt. Als notwendig und hinreichend dafür wird folgende Bedingung erkannt:

Besitzen L_1 und L_2 Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren, so sind diese Faktoralgebren hyperzentral.

Unter diesem Aspekt werden die konstruierten Lie-Algebren einer verschärften Isomorphiebetrachtung unterworfen. Es wird geprüft, wann Algebren Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren, die nicht hyperzentral sind, besitzen.

Als Ergebnis dieser Kalkulationen erhalten wir, daß das direkte Produkt zweier Lie-Algebren genau dann die Idealisatorbedingung erfüllt, wenn die definierenden Folgen keine "gemeinsamen Endstücke" besitzen.

(Wir sagen, zwei Folgen $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitzen gemeinsame Endstücke, wenn zwei Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ existieren mit folgender Eigenschaft: $n_{c_1+i} = m_{c_2+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.)

Definiert man nun zwei Folgen mit gemeinsamen Endstücken als äquivalent, so erhält man eine Klasseneinteilung aller Folgen natürlicher Zahlen. Man überlegt sich leicht, daß es überabzählbar viele Äquivalenzklassen gibt, wobei jede abzählbar viele

Folgen enthält.

Dadurch wird für jede Primzahl $p > 2$ offenbar eine Klasseneinteilung der über $\mathbb{Z}_p$ konstruierten Lie-Algebren induziert, wobei es wieder überabzählbar viele Klassen gibt, deren jede abzählbar viele verschiedene Lie-Algebren enthält. Das direkte Produkt zweier Lie-Algebren erfüllt genau dann die Idealisatorbedingung, wenn die beiden Algebren aus verschiedenen Klassen stammen.

An dieser Stelle danke ich Herrn Univ.Do. Dr.H.Heineken für die Überlassung dieser Arbeit und dafür, daß er mir bei ihrer Anfertigung stets mit Rat und Tat hilfreich zur Seite stand.

BEZEICHNUNGEN UND BEGRIFFE

N	Menge der natürlichen Zahlen
N_0	Menge der natürlichen Zahlen zuzüglich 0
Z_p	Primkörper der Charakteristik p
$Z_p[x]$	Polynomring über Z_p
$a \equiv b(n)$	a kongruent b modulo n
$a \not\equiv b(n)$	a inkongruent b modulo n
$a \mid b$	a teilt b
$a \nmid b$	a teilt b nicht
$\max\{a,b,\dots\}$	Maximum der Elemente a,b,...
$\min\{a,b,\dots\}$	Minimum der Elemente a,b,...
$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$\in$	"Element von"
$\text{Rest}_A f$	Restriktion der Abbildung f auf die Menge A
$\text{ord } f, \text{ord}(f)$	Ordnung der nilpotenten Abbildung f, d.h. $\text{ord } f = \min n \in N \quad f^n = 0$
$U \subseteq V$	U ist Unteralgebra von V
$U < V$	U ist Unteralgebra von V und $U \neq V$
$U \triangleleft V$	U ist Ideal in V
U / V	Faktoralgebra U nach V
$\cong$	"isomorph"

$[x,y]$ ist das Produkt der Elemente x,y einer Lie-Algebra.

Induktiv wird definiert $[x,y^{(0)}] = x$, $[x,y^{(n+1)}] = [[x,y^{(n)}],y]$.

Die Lie-Algebra einer assoziativen Algebra wird bekanntlich durch die Festsetzung $[x,y] = xy - yx$ konstruiert.

Für Teilmengen U,V einer Lie-Algebra L ist $[U,V]$ die von allen Produkten $[u,v]$, $u \in U$, $v \in V$, erzeugte Unteralgebra von L.

Damit erklären wir die Glieder der absteigenden Zentralreihe einer Lie-Algebra L folgendermaßen:

$$L^1 = L, \quad L^{n+1} = [L^n, L]$$

Statt L^2 schreiben wir L' .

$(a,b,\dots)$ bezeichne die von den Elementen a,b,... erzeugte Algebra, deren Typ wir im Einzelfall angeben.

$\langle a,b,\dots \rangle$ bezeichne das von a,b,... erzeugte Ideal einer Algebra, die im Einzelfall angegeben wird.

Nullalgebren und Nullelemente werden mit 0 bezeichnet.

Eine lineare Abbildung D einer Lie-Algebra in sich heißt Derivation, wenn für je 2 Elemente $x, y \in L$ gilt:

$$[x, y] D = [x D, y] + [x, y D]$$

Eine Derivation D heißt innere Derivation, wenn ein $z \in L$ existiert mit

$$x D = [x, z] \quad \text{für alle } x \in L$$

$\text{ad } z$ ist die von dem Element z induzierte innere Derivation:

$$\text{ad } z : x \longrightarrow [x, z]$$

A_L von den inneren Derivationen von L erzeugte assoziative Algebra

D_L von den inneren Derivationen erzeugte Unter algebra der Lie-Algebra von A_L

Für das Folgende seien U, L Lie-Algebren mit $U \subseteq L$. Dann ist

$Z(L)$ Zentrum von L , d.h. Menge aller $z \in L$ mit $L \text{ ad } z = 0$

$C(U)$ Zentralisator von U , d.h. Menge aller $z \in L$ mit $U \text{ ad } z = 0$

$I(U)$ Idealisator von U , d.h. Menge aller $z \in L$ mit $u \text{ ad } z \in U$ für alle $u \in U$

Die Oberalgebra L von U , auf die sich die Angaben des Zentralisators bzw. Idealisators beziehen, wird, wenn nicht Mißverständnisse ausgeschlossen sind, im Einzelfall angegeben werden.

$U \times V$ direktes Produkt der Algebren U und V

Eine Algebra L heißt zerlegbar, wenn Algebren $H_1 \neq 0$ und $H_2 \neq 0$ existieren mit

$$L \cong H_1 \times H_2,$$

andernfalls heißt sie unzerlegbar.

Eine Algebra L heißt hyperzentral, wenn gilt:

Für jedes Ideal K von L mit $Z(L/K) = 0$ folgt $L/K = 0$.

Eine Algebra L erfüllt die Idealisatorbedingung, wenn gilt:

Für jede Unter algebra U von L mit $I(U) = U$ folgt $U = L$.

Wenn L die Idealisatorbedingung erfüllt, ist also jede echte Unter algebra von L von ihrem Idealisator in L verschieden.

I. ALLGEMEINE SÄTZE

§1. Hilfsmittel

Zunächst seien zwei zahlentheoretische Bemerkungen gemacht.

1. Es ist allgemein bekannt, daß für jede Primzahl p gilt

$$\binom{p^n}{i} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < i < p^n \quad (1.1.1)$$

2. Eine ähnliche Beziehung ist die folgende.

$$(-1)^i \binom{p^n-1}{i} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq i \leq p^n-1 \quad (1.1.2)$$

Diese Kongruenz ergibt sich so:

In $\mathbb{Z}_p[x]$ gilt $(1-x)^{p^n} = 1 - x^{p^n} = (1-x)(1+x+\dots+x^{p^n-1})$;

Da mit $\mathbb{Z}_p$ auch $\mathbb{Z}_p[x]$ Integritätsbereich ist, folgt

$$(1-x)^{p^n-1} = 1+x+\dots+x^{p^n-1} ;$$

Andererseits ist $(1-x)^{p^n-1} = \sum_{i=0}^{p^n-1} (-1)^i \binom{p^n-1}{i} x^i$;

Daraus folgt die behauptete Kongruenz.

In einer assoziativen Algebra A gilt bekanntlich für zwei beliebige Elemente x, y die Gleichung

$$[x, y^{(n)}] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1.3)$$

Handelt es sich um eine Algebra über $\mathbb{Z}_p$, so folgt sofort

$$[x, y^{(p^n)}] = x y^{p^n} - y^{p^n} x = [x, y^{p^n}] \quad n \geq 0 \quad (1.1.4)$$

Diese Gleichung gibt Anlaß zu einer Feststellung, die wir noch verwenden werden.

Es seien $u_1, \dots, u_k \in A$ und $n_1, \dots, n_k$ nichtnegative ganze Zahlen.

$u_1, \dots, u_k$ erzeugen eine Unter algebra L , $u_1^{p^{n_1}}, \dots, u_k^{p^{n_k}}$ eine Unter algebra K der Lie-Algebra von A .

Dann gilt wegen (1.1.4) $K' \subseteq L'$.

(1.1.3) besitzt ein Analogon für Derivationen. Sei D eine Derivation einer Lie-Algebra. Dann gilt

$$[x, y] D^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [x D^i, y D^{n-i}] \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.1.5)$$

Im Falle der Charakteristik p folgt wieder

$$[x, y] D^{p^n} = [xD^{p^n}, y] + [x, yD^{p^n}] \quad n \geq 0 \quad (1.1.6)$$

Also ist im Fall der Charakteristik p auch D^{p^n} eine Derivation.
(Siehe auch Zassenhaus, "Lie-Algebren der Charakteristik p ".)

Nach Jacobson, "Lie Algebras", Chap. 5, gilt für 2 Elemente u, v einer assoziativen Algebra A über Z_p :

$$(u+v)^p \equiv u^p + v^p \quad (L') \quad (1.1.7)$$

Dabei ist hier L die von u und v erzeugte Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra der assoziativen Algebra A .

Dieses Resultat läßt sich nun verallgemeinern.

Wir betrachten n Elemente $u_1, \dots, u_n \in A$. Die von ihnen erzeugte Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra von A sei L . Mit vollständiger Induktion über n folgt sofort

$$(u_1 + \dots + u_n)^p \equiv u_1^p + \dots + u_n^p \quad (L') \quad (1.1.8)$$

$$\text{bzw.} \quad (u_1 + \dots + u_n)^p = u_1^p + \dots + u_n^p + g' \quad g' \in L'$$

Beweis: Für $n=2$ ist die Behauptung richtig. Sie sei für ein n als richtig vorausgesetzt. Dann folgt für $n+1$:

$$\begin{aligned} (u_1 + \dots + u_n + u_{n+1})^p &\equiv (u_1 + \dots + u_n)^p + u_{n+1}^p \quad (L') \\ &\equiv u_1^p + \dots + u_n^p + u_{n+1}^p \quad (L') \end{aligned}$$

(Dabei werde natürlich L von $u_1, \dots, u_{n+1}$ erzeugt.)

Nun machen wir eine zusätzliche Voraussetzung, die später ihre Rechtfertigung erhalten wird:

$u_1, \dots, u_n$ und L seien wie in (1.1.8). Es soll überdies für alle $g', h' \in L'$ gelten $g'h' = 0$. Dann folgt

$$(u_1 + \dots + u_n)^{p^m} \equiv u_1^{p^m} + \dots + u_n^{p^m} \quad (L') \quad m \geq 0 \quad (1.1.9)$$

Beweis: Für $m=0$ ist die Behauptung trivial und für $m=1$ ist sie der Inhalt von (1.1.8). Sie gelte nun für ein m , d.h.

$$(u_1 + \dots + u_n)^{p^m} = u_1^{p^m} + \dots + u_n^{p^m} + g_m' \quad g_m' \in L'$$

Dann folgt unter Berücksichtigung der Bemerkung im Anschluß an (1.1.4) mit (1.1.8) und der zusätzlichen Voraussetzung

$$\begin{aligned}(u_1 + \dots + u_n)^{p^{m+1}} &= (u_1^{p^m} + \dots + u_n^{p^m} + g_m')^p \\&= u_1^{p^{m+1}} + \dots + u_n^{p^{m+1}} + g_m'^p + g_{m+1}' \\&= u_1^{p^{m+1}} + \dots + u_n^{p^{m+1}} + g_{m+1}'; \quad g_{m+1}' \in L'\end{aligned}$$

Da m beliebig war, ist die Behauptung bewiesen.

Wir werden später noch folgenden Satz benötigen.

Satz 1.1.1: Sei U Unteralgebra der nilpotenten Lie-Algebra V .

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, so daß für die durch

$$U_0 = U, \quad U_{i+1} = I(U_i)$$

definierte aufsteigende Folge gilt: $U_n = V$.

Beweis: V ist nilpotent. Daher endet die durch

$$Z_0 \doteq 0, \quad Z_{i+1}/Z_i = Z(V/Z_i)$$

definierte aufsteigende Zentralreihe nach endlich vielen Schritten bei V .

Ferner gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$: $Z_i \subseteq U_i$.

Für $i=0$ ist dies zweifellos richtig.

Wenn nun die Behauptung für ein beliebiges i richtig ist, folgt für jedes $v_{i+1} \in Z_{i+1}$

$$[x, v_{i+1}] \in Z_i \quad \text{für alle } x \in V,$$

$$\text{insbesondere} \quad [x, v_{i+1}] \in U_i \quad \text{für alle } x \in U_i,$$

$$\text{d.h.} \quad Z_{i+1} \subseteq I(U_i) = U_{i+1}.$$

Insgesamt ist damit die Behauptung bewiesen.

§2. Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung

Zunächst soll die Frage untersucht werden, ob Unter- und Faktor-algebren einer Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt, ebenfalls der Idealisatorbedingung genügen.

Die Frage wird durch die folgenden 2 Sätze beantwortet.

Satz 1.2.1: Sei L eine Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt, und U eine Unter algebra von L . Dann genügt auch U der Idealisatorbedingung.

Beweis: Sei V eine beliebige Unter algebra von U mit $V \neq U$.

Weiter sei $I(V)$ der Idealisator von V in L .

Es genügt zu zeigen, daß $V \subset I(V) \cap U$ ist, denn $I(V) \cap U$ ist der Idealisator von V in U .

Sei $\mathcal{M}$ das System derjenigen Unter algebren von L , deren Durchschnitt mit U gerade V ist. Sicher ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$, denn $V \in \mathcal{M}$.

Sei weiter $\mathcal{K}$ eine Kette von Algebren $V_i, i \in I$, einer gewissen Indexmenge, die alle zu $\mathcal{M}$ gehören.

Dann gilt:

$$\left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap U = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap U) = \bigcup_{i \in I} V = V$$

Die Vereinigungsmenge der Kette gehört also selbst zu $\mathcal{M}$.

Da $\mathcal{K}$ beliebig war, existiert nach dem Zorn'schen Lemma in $\mathcal{M}$ zu V eine maximale Algebra V_0 .

Aus $V_0 \subset V_1 \subset L$ folgt dann stets $V \subset V_1 \cap U$.

Nun ist wegen $L \cap U = U \supset V$ sicher $V_0 \neq L$, d.h. $I(V_0) \supset V_0$, also $I(V_0) \cap U \supset V$. Es existiert deshalb ein Element $v_0 \in (I(V_0) \cap U) \setminus V$.

Sei schließlich $v \in V$ beliebig. Wegen $v_0 \in U$ folgt $[v, v_0] \in U$.

Da $V \subseteq V_0$, gilt weiter $[v, v_0] \in V_0$, also $[v, v_0] \in V_0 \cap U = V$.

Es ist also $v_0 \in I(V)$ und damit $I(V) \cap U \supset V$.

Dies aber war zu zeigen.

Der zweite Teil der ursprünglich aufgeworfenen Frage wird gelöst durch

Satz 1.2.2: Sei L eine Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt, und X ein Ideal von L .

Dann genügt auch L/X der Idealisatorbedingung.

Beweis: Der Homomorphismus $L \rightarrow L/X$ heiße φ .

Sei $H \subset L/X$. Dann ist

$$H\varphi^{-1} \subset L, \text{ also } I(H\varphi^{-1}) \supset H\varphi^{-1}$$

$$\text{Es folgt } I(H) \supset (I(H\varphi^{-1}))\varphi \supset (H\varphi^{-1})\varphi = H \quad \text{w.z.b.w.}$$

Nachdem geklärt ist, ob sich die Erfüllung der Idealisatorbedingung auf Unter- und Faktoralgebren vererbt, soll untersucht werden, wie es damit beim Bilden direkter Produkte bestellt ist.

Wir werden zunächst eine einfache hinreichende Bedingung dafür angeben, daß das direkte Produkt zweier Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung nicht die Idealisatorbedingung erfüllt. Sodann werden wir diese Bedingung verallgemeinern. Es wird sich herausstellen, daß diese Bedingung dann auch notwendig ist.

Im Folgenden sollen alle auftretenden Algebren denselben Grundkörper haben!

Satz 1.2.3: Es seien L_1 und L_2 Lie-Algebren, die folgenden Bedingungen genügen:

- 1) $L_1 \cong L_2 \neq 0$
- 2) $Z(L_1) \cong Z(L_2) = 0$

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung.

Beweis: Der Isomorphismus $L_1 \rightarrow L_2$ heiße σ .

Wir betrachten die Menge $U = \{u + u\sigma \mid u \in L_1\}$. Offenbar ist U eine Unter algebra von $L_1 \times L_2$ und wegen $L_1 \neq 0$ gilt $U \neq L_1 \times L_2$, ferner $U \cap L_1 = U \cap L_2 = 0$.

Es werde nun angenommen, daß $L_1 \times L_2$ die Idealisatorbedingung erfülle. Dann wäre $I(U) \supset U$ und es müßte ein Element $u_0 + v_0 \in I(U)$ mit $u_0 \in L_1, v_0 \in L_2$ aber $u_0 + v_0 \notin U$, d.h. $v_0 \neq u_0\sigma$, existieren. Dann wäre aber auch $0 \neq u_0 + v_0 - (u_0 + u_0\sigma) = v_0 - u_0\sigma \in I(U)$.

Weiter würde gelten: Für jedes $u \in L_1$ und damit für jedes $u \in L_2$ ist

$$[u+u_0, v_0-u_0] = [u, v_0-u_0] \in (0 \times L_2) \cap U = 0$$

Das aber würde bedeuten, daß $v_0-u_0 \in Z(L_2)$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $Z(L_2) = 0$ ist. Also erfüllt $L_1 \times L_2$ in der Tat nicht die Idealisatorbedingung.

Dieses Ergebnis läßt sich nun sofort verallgemeinern.

Satz 1.2.4: Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. Es existiere ferner ein Quadrupel (X_1, U_1, X_2, U_2) von Lie-Algebren, die folgende Bedingungen erfüllen:

- 1) $X_i \subseteq U_i \subseteq L_i \quad i = 1, 2$
- 2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$
- 3) $Z(U_1/X_1) \cong Z(U_2/X_2) = 0$

Dann genügt $L_1 \times L_2$ nicht der Idealisatorbedingung.

Beweis: Wir wollen annehmen, $L_1 \times L_2$ erfülle die Idealisatorbedingung.

Nach Satz 1.2.1 erfüllt dann auch $U_1 \times U_2 \subseteq L_1 \times L_2$ die Idealisatorbedingung.

Es gilt $(U_1 \times U_2)/(X_1 \times X_2) \cong U_1/X_1 \times U_2/X_2$ und diese Algebra müßte nach Satz 1.2.2 ebenfalls die Idealisatorbedingung erfüllen. Wegen der Bedingungen 2) und 3) und wegen Satz 1.2.3 ist dies jedoch unmöglich. Die Annahme führt auf einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen.

Äquivalent dazu ist folgender

Satz 1.2.4': Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. $L_1 \times L_2$ genüge der Idealisatorbedingung.

Wenn dann ein Quadrupel (X_1, U_1, X_2, U_2) von Unteralegebren existiert mit

- 1) $X_i \subseteq U_i \subseteq L_i \quad i = 1, 2$
- 2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$

so ist notwendigerweise

$$Z(U_1/X_1) \cong Z(U_2/X_2) \neq 0.$$

Für die weiteren Überlegungen treffen wir folgende Definition:

L_1 und L_2 seien Lie-Algebren. (Wieder über demselben Grundkörper.) Wir erklären Abbildungen

$$\pi_i : L_1 \times L_2 \longrightarrow L_i, \quad i = 1, 2$$

durch

$$(u_1 + u_2) \pi_i = u_i, \quad u_i \in L_i$$

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun einige Ergebnisse über die Unteralegebren von $L_1 \times L_2$ formulieren, die uns zur Umkehrung der Sätze 1.2.4 bzw. 1.2.4' verhelfen sollen.

Satz 1.2.5: Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. $U \subseteq L_1 \times L_2$,

$$U_j = U \pi_j, \quad X_i = U \cap L_i, \quad i = 1, 2.$$

Dann gilt: 1) Die U_i sind Unteralegebren von L_i

2) $X_i \subseteq U_i$ (folglich $X_i = U \cap U_i$)

3) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2$

Beweis: 1) ist unmittelbar einsichtig.

Wir zeigen 2) für den Fall $i=1$, der Fall $i=2$ geht analog.

Offenbar ist $X_1 \subseteq U_1$. Sei $u_1 \in U_1$, $x_1 \in X_1$. Dann ist $[x_1, u_1] \in L_1$.

Zu u_1 existiert ein $u_2 \in L_2$ mit $u_1 + u_2 \in U$. Dann ist wegen $X_1 \subseteq U$ sogar $[x_1, u_1] = [x_1, u_1 + u_2] \in U$. Da u_1 keiner Einschränkung unterlag, ist 2) gezeigt.

3) folgt so: Sei $u_0 + X_1 \in U_1/X_1$. Dann existiert ein $v \in U_2$ mit

$u_0 + v \in U$. Sei $v' \in U_2$ ein weiteres Element mit $u_0 + v' \in U$.

Dann ist $(u_0 + v) - (u_0 + v') = v - v' \in U \cap U_2 = X_2$.

Zu jedem $u_0 + X_1 \in U_1/X_1$ existiert also genau eine Nebenklasse $v_0 + X_2 \in U_2/X_2$ mit $u_0 + v_0 \in U$.

Wir erhalten so in natürlicher Weise eine injektive Abbildung ϕ von U_1/X_1 nach U_2/X_2 . Man sieht sofort, daß ϕ auch surjektiv ist.

Wir wollen nachweisen, daß ϕ ein Isomorphismus ist.

Sei nun $u_i + X_1 \in U_1/X_1$ beliebig, $(u_i + X_1)\phi = v_i + X_2$, $i = 0, 1$.

Ferner sei α ein beliebiges Element aus dem gemeinsamen Skalarkörper von L_1 und L_2 .

Dann ist $u_i + v_i \in U$, $i = 0, 1$, und damit $u_0 + u_1 + v_0 + v_1 \in U$,

$$\alpha u_0 + \alpha v_0 \in U, [u_0, u_1] + [v_0, v_1] = [u_0 + v_0, u_1 + v_1] \in U.$$

$$\text{D.h.} \quad (\alpha u_0 + X_1)\phi = \alpha v_0 + X_2 = \alpha((u_0 + X_1)\phi),$$

$$(u_0 + u_1 + X_1)\phi = v_0 + v_1 + X_2 = (u_0 + X_1)\phi + (u_1 + X_1)\phi,$$

$$([u_0, u_1] + X_1)\phi = [v_0, v_1] + X_2 = [(u_0 + X_1)\phi, (u_1 + X_1)\phi].$$

Somit ist ϕ in der Tat ein Isomorphismus.

Wir sind jetzt in der Lage, unsere Überlegungen zu vervollständigen. Es gilt der folgende

Satz 1.2.6: L_1 und L_2 seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen. Für jedes Quadrupel (X_1, U_1, X_2, U_2) mit

$$1) \quad X_i \subseteq U_i \subseteq L_i, \quad i = 1, 2,$$

$$2) \quad U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0,$$

$$\text{gelte} \quad Z(U_1/X_1) \cong Z(U_2/X_2) \neq 0.$$

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ die Idealisatorbedingung.

Beweis: Sei $U \subseteq L_1 \times L_2$ beliebig.

Mit den Bezeichnungen von Satz 1.2.5 gilt $U_1/X_1 \cong U_2/X_2$.

Wäre etwa $U_1/X_1 = 0$, so wäre $X_1 = U_1$, $X_2 = U_2$, also $U = U_1 \times U_2$.

Dann wäre auch $I(U) = (I(U_1) \cap L_1) \times (I(U_2) \cap L_2)$.

Da nach Voraussetzung $U = U_1 \times U_2 \subset L_1 \times L_2$, wäre etwa $U_1 \subset L_1$. Dann

ergäbe sich weiter $I(U_1) \cap L_1 \supset U_1$ (und $I(U_2) \cap L_2 \supset U_2$).

Somit wäre $I(U) = (I(U_1) \cap L_1) \times (I(U_2) \cap L_2) \supset U_1 \times U_2 = U$.

Wir können also weiter annehmen, daß $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist dann $Z(U_1/X_1) \neq 0$. Das bedeutet, daß ein

$u_0 \in U_1$, $u_0 \notin X_1$, existiert, derart daß für alle $u \in U_1$ gilt:

$$[u, u_0] \in X_1. \text{ Wegen } u_0 \notin X_1 \text{ gilt überdies } u_0 \notin U.$$

Sei nun $u+v \in U$ beliebig.

Dann gilt:

$$[u+v, u_0] = [u, u_0] \in X_1 \subseteq U$$

Also $I(U) \supset U$.

Damit ist Satz 1.2.6 vollständig bewiesen.

Abschließend wollen wir diese Ergebnisse zusammenfassen in

Satz 1.2.7 : L_1 und L_2 seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen. Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ genau dann die Idealisatorbedingung, wenn gilt:

Für je 4 Unterhalbgebren X_1, U_1, X_2, U_2 mit

$$1) \quad X_i \subseteq U_i \subseteq L_i \quad i = 1, 2$$

$$2) \quad U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$$

ist

$$Z(U_1/X_1) \cong Z(U_2/X_2) \neq 0$$

Da die X_i keinen weiteren Einschränkungen unterliegen, läßt sich dieser Satz auch so formulieren:

Satz 1.2.8: L_1 und L_2 seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen.

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ genau dann die Idealisatorbedingung, wenn gilt:

Besitzen L_1 und L_2 Unterhalbgebren mit isomorphen Faktoralgebren, so sind diese Faktoren hyperzentral.

Über die Beziehung zwischen Idealisatorbedingung und Hyperzentralität bei Lie-Algebren gibt der folgende Satz Auskunft, der sich direkt aus der Gruppentheorie übertragen läßt.

Satz 1.2.9: Jede hyperzentrale Lie-Algebra genügt der Idealisatorbedingung.

Beweis: Sei L eine beliebige hyperzentrale Lie-Algebra und U eine beliebige eigentliche Unter algebra von L .

Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Ideal M von L mit $M \subseteq U \subset L$.

Da L hyperzentral und $M \neq L$, existiert weiter ein Ideal N von L mit $M \subset N$ und $N/M = Z(L/M) \neq 0$.

Da M maximal war, folgt die Existenz eines Elementes $x \in N$, $x \notin U$. Für dieses x gilt: $[x, l] \in M \subseteq U$ für alle $l \in L$. Das bedeutet $x \in I(U)$ und damit $U \subset I(U)$.

w.z.b.w.

Die Konstruktionen von Abschnitt II werden zeigen, daß die Umkehrung dieses Satzes, wie in der Gruppentheorie, i.allg. falsch ist.

§3. Nilpotenz-Eigenschaften von Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung

Ehe wir uns dem eigentlichen Ziel der Arbeit zuwenden, soll noch geklärt werden, in welchem Umfang sich die gruppentheoretischen Ergebnisse günstigstenfalls in die Theorie der Lie-Algebren übertragen lassen.

Dabei kommt es uns auf die folgenden 4 Eigenschaften von Lie-Algebren an:

- I Das Zentrum der Algebra ist 0
- II Jede echte Unter algebra ist nilpotent
- III Die Lie-Algebra erfüllt die Idealisatorbedingung
- IV Die Kommutator algebra der Lie-Algebra ist abelsch

Wir werden sehen, daß eine von der Nullalgebra verschiedene Lie-Algebra nicht alle 4 Eigenschaften zugleich besitzen kann, wie es bei völliger Übertragbarkeit der Sätze aus der Gruppentheorie zu erwarten wäre.

Zunächst benötigen wir

Lemma 1.3.1: Sei H Ideal einer Lie-Algebra L , die der Idealisatorbedingung genügt. Es sei $Z(H) \neq 0$. Ferner existiere ein $a \in L$ mit $L = (H, a)$.
Dann ist $Z(L) \neq 0$.

Beweis: Der Beweis verläuft wie in der Gruppentheorie.

Nach Satz 1.2.1 genügt $(Z(H), a) \leq L$ der Idealisatorbedingung, d.h. der Idealisator von (a) in $(Z(H), a)$ enthält ein $z \in Z(H)$, $z \neq 0$. Wenn $[z, a] = 0$, dann ist $z \in Z(L)$.

Ist $[z, a] \neq 0$, so ist $[z, a] \in Z(H)$ wegen $Z(H) \trianglelefteq L$. Andererseits ist $[z, a] \in (a)$, so daß $[[z, a], a] = 0$. Damit ist $[z, a] \in Z(L)$.

Also ist tatsächlich $Z(L) \neq 0$.

Dieses Lemma benutzen wir, um eine Verallgemeinerung zu zeigen, die wieder ihr gruppentheoretisches Analogon hat.

Lemma 1.3.2: Sei H ein hyperzentrales Ideal einer Lie-Algebra L , die die Idealisatorbedingung erfüllt. Ferner existiere ein $a \in L$ mit $L = (H, a)$.

Dann ist auch L hyperzentral.

Beweis: Sei I ein beliebiges Ideal von L mit $L/I \neq 0$. Nach Satz 1.2.2 genügt L/I der Idealisatorbedingung. Ferner ist $H/(H \cap I) \cong L/I$.

Falls $H/(H \cap I) = 0$, ist $H \subseteq I$ und damit $L/I = (a + I)$.

Damit ist $Z(L/I) = L/I \neq 0$.

Wenn aber $H/(H \cap I) \neq 0$, ist $Z(H/(H \cap I)) \neq 0$. (H hyperzentral!)

Da überdies $L/I = (H/(H \cap I), a + I)$, folgt nach Lemma 1.3.1

$Z(L/I) \neq 0$.

w.z.b.w.

Mit diesen Lemmata ausgestattet, können wir nun zeigen

Satz 1.3.1: Sei L eine Lie-Algebra mit den Eigenschaften II und III, sowie $L' \neq L$. Dann ist L hyperzentral.

Beweis: Wegen $L' \neq L$ existiert ein $a \in L, a \notin L'$.

Nach Zorns Lemma existiert weiter eine maximale Unterálgebra B von L mit $L' \subseteq B \subseteq L$ und $a \notin B$.

Sei $x \in L$ ein beliebiges Element, das nicht in B liegt. Wegen der Maximalität von B ist dann mit geeignetem α aus dem Skalarenkörper von L und $b \in B$

$$a = \alpha x + b.$$

Wegen $a \notin B$ ist $\alpha \neq 0$. Damit ergibt sich

$$x = \alpha^{-1}a - \alpha^{-1}b.$$

Also ist $x \in (B, a)$ und man hat $L = (B, a)$.

Wegen $B \neq L$ ist nach Voraussetzung B nilpotent und damit hyperzentral. Nach Lemma 1.3.2 ist dann auch L hyperzentral.

w.z.b.w.

In diesem Beweis tritt ein entscheidender Unterschied zur Gruppentheorie auf:

Sei G eine Gruppe, $G' \neq G$, $x \in G$, $x \notin G'$. Dann existiert ebenfalls ein maximaler Normalteiler F von G mit $G' \subseteq F$ und $x \notin F$. Das Erzeugnis $\langle F, x \rangle$ ist aber im allgemeinen von G verschieden.

Für eine nichttriviale Lie-Algebra L mit den Eigenschaften I, II, III kann nach dem eben bewiesenen Satz L' nicht abelsch sein. Beim Versuch, die gruppentheoretischen Resultate auf Lie-Algebren zu übertragen, muß man also auf wenigstens eine der 4 Eigenschaften verzichten.

Es wird sich herausstellen, daß man unter Verzicht auf II die übrigen Eigenschaften erhalten kann.

Nilpotenzeigenschaften gehen aber keineswegs völlig verloren. Wie in der Gruppentheorie ist nämlich jede Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung lokal nilpotent. Die diesbezüglichen Sätze der Gruppentheorie lassen sich mühelos übertragen.

Zunächst seien zwei Sätze über hyperzentrale Lie-Algebren bewiesen.

Satz 1.3.2: Sei U Unteralgebra der hyperzentralen Lie-Algebra L . Dann ist U hyperzentral.

Beweis: Sei H ein beliebiges Ideal von U mit $H \neq U$.

Da $0 \in H$, existiert nach dem Zorn'schen Lemma ein maximales Ideal N von L mit

$$N \cap U \subseteq H.$$

Wegen $H \neq U$ ist $N \neq L$ und es existiert ein Ideal Z von L mit

$$Z/N = Z(L/N) \neq 0.$$

Da N maximal war, existiert ein $z \in U$, $z \notin H$ mit $z \in Z \cap U$.

Für dieses z gilt

$$z \in Z(U/H).$$

Da H beliebig war, ist U tatsächlich hyperzentral.

w.z.b.w.

Satz 1.3.3: Jede hyperzentrale Lie-Algebra ist lokal nilpotent.

Beweis: Sei L eine hyperzentrale Lie-Algebra. Dann besitzt L eine aufsteigende Zentralreihe

$$0 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_\alpha = L.$$

Dabei ist $Z_{\beta+1}/Z_\beta \subseteq Z(L/Z_\beta)$ für jeden Index β ,
 $Z_\beta = \bigcup_{\lambda < \beta} Z_\lambda$, falls β eine Limeszahl ist.

$Z_1 = Z(L)$ ist lokal nilpotent. Wir wollen daher annehmen, daß bereits für alle hyperzentralen Lie-Algebren, die eine aufsteigende Zentralreihe mit kleinerer Länge als α besitzen, die lokale Nilpotenz gezeigt sei.

Sei M eine beliebige Menge von endlich vielen Elementen

$$a_1, \dots, a_n \in L.$$

Falls α eine Limeszahl ist, existiert ein $\beta < \alpha$ mit $a_1, \dots, a_n \in Z_\beta$. Nach Induktionsannahme ist dann $(a_1, \dots, a_n)$ nilpotent.

Falls α keine Limeszahl ist, existieren $k \in \mathbb{N}$ und eine Limeszahl β mit $\alpha = \beta + k$.

Wir betrachten alle Kommutatoren aus $k+1$ Elementen von M .

Es gibt deren nur endlich viele und alle liegen in Z_β . Da β Limeszahl ist, existiert ein $\gamma < \beta$ derart, daß diese Kommutatoren alle in Z_γ liegen.

Sei $H = (Z_\gamma, a_1, \dots, a_n)$

Als Unter algebra von L ist H nach Satz 1.3.2 hyperzentral.

Wir erhalten eine aufsteigende Zentralreihe von H

$$0 = Z_0 \subset \dots \subset Z_\gamma \subseteq \bar{Z}_{\gamma+1} \subseteq \dots \subseteq H$$

vermöge $\bar{Z}_{\gamma+0} = Z_\gamma$, $\bar{Z}_{\gamma+i+1}/\bar{Z}_{\gamma+i} = Z(H/\bar{Z}_{\gamma+i})$, $i \in \mathbb{N}_0$

Man erkennt sofort, daß Kommutatoren aus k Elementen von M in $\bar{Z}_{\gamma+1}$ liegen, aus $k-1$ Elementen in $\bar{Z}_{\gamma+2}$ usw. Die Elemente aus M selbst liegen schließlich in $\bar{Z}_{\gamma+k}$.

Man hat so $0 = Z_0 \subset \dots \subset Z_\gamma \subset \dots \subset \overline{Z}_{\gamma+k} = H$.

Da $\gamma+k < \beta < \alpha$, ist nach Induktionsannahme H lokal nilpotent und damit $(a_1, \dots, a_m)$ nilpotent

w.z.b.w.

Weiter benötigen wir

Lemma 1.3.3: Seien x und a Elemente einer Lie-Algebra L mit Idealisatorbedingung.

Sei $x_0 = x$, $x_{i+1} = [x_i, a]$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i = 0$.

Beweis: Wenn $x_i \in (a)$ für ein $i \in \mathbb{N}_0$, dann ist $[x_i, a] = x_{i+1} = 0$.

Wenn hingegen $x_i \notin (a)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, existiert eine maximale Lie-Algebra N mit $(a) \subseteq N \subset L$ und $x_i \notin N$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Weiter ist $N \subset I(N)$. Wegen der Maximalität von N existiert ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in I(N)$. Dann ist $[x_i, a] = x_{i+1} \in N$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

w.z.b.w.

Wir können nun zeigen

Lemma 1.3.4: Sei H ein lokal nilpotentes Ideal einer Lie-Algebra L mit Idealisatorbedingung und $L = (H, a)$.

Dann ist L lokal nilpotent.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jede Lie-Algebra der Form

$$\overline{F} = (a, h^{(1)}, \dots, h^{(n)}) , h^{(k)} \in H , k = 1, \dots, n ,$$

nilpotent ist, da jede endlich erzeugte Unter algebra von L in einer derartigen Algebra enthalten ist.

Sei $h_0^{(k)} = h^{(k)}$, $h_{i+1}^{(k)} = [h_i^{(k)}, a]$, $i \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \dots, n$,

und $F = (h_i^{(k)})$, $i \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \dots, n$.

Offenbar ist $F \subseteq H$, $F \subseteq I(\overline{F})$ und $\overline{F} = (F, a)$.

Nach Lemma 1.3.3 ist F endlich erzeugt und daher nilpotent. Nach Lemma 1.3.2 ist dann $\bar{F}$ hyperzentral. Satz 1.3.3 liefert die Nilpotenz von $\bar{F}$.

w.z.b.w.

Damit sind wir angelangt bei

Satz 1.3.4: Jede Lie-Algebra, die die Idealisatorbedingung erfüllt, ist lokal nilpotent.

Beweis: Sei L eine Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung. Die Nullalgebra ist eine lokal nilpotente Unter algebra von L . Nach dem Zorn'schen Lemma existiert eine maximale lokal nilpotente Unter algebra H von L .

Sei $a \in I(H)$ beliebig.

Nach Satz 1.2.1 erfüllt (H, a) die Idealisatorbedingung. Nach Lemma 1.3.4 ist daher (H, a) lokal nilpotent. Da H maximal war, folgt $(H, a) = H$, d.h. $a \in H$. Da $a \in I(H)$ beliebig war, hat man $I(H) = H$. Also ist, da L die Idealisatorbedingung erfüllt, $H = L$, d.h. L ist lokal nilpotent.

w.z.b.w.

Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch keineswegs richtig. Es lassen sich leicht lokal nilpotente Lie-Algebren angeben, die die Idealisatorbedingung nicht erfüllen.

Wir nehmen dazu eine der in II.§1 konstruierten Lie-Algebren L und bilden das direkte Produkt $L \times L$.

Es ist $L \neq 0$ und nach Satz 2.2.2 überdies $Z(L) = 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.2.3 erfüllt und $L \times L$ genügt nicht der Idealisatorbedingung.

Auf der anderen Seite ist aber wegen Satz 2.4.2 die lokale Nilpotenz von L und damit auch von $L \times L$ sichergestellt.

II. LIE-ALGEBREN MIT TRIVIALEM ZENTRUM UND IDEALISATORBEDINGUNG

§1. Konstruktion

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Ziel zu, Lie-Algebren über Z_p zu konstruieren, deren Zentrum 0 ist, die die Idealisatorbedingung erfüllen und deren Kommutatorialgebra abelsch ist.

Dabei werden wir von assoziativen Algebren über Z_p ausgehen. Gewisse Unterhalbgebren der Lie-Algebren dieser assoziativen Algebren werden dann die gewünschten Eigenschaften haben.

Generelle Voraussetzung wird sein $p > 2$.

Es sei eine beliebige Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}$ gegeben. Mit ihrer Hilfe definieren wir eine assoziative Algebra F :

1) F werde von den Elementen a, x_i , $i \in \mathbb{N}$, erzeugt.

2) Dabei werden die Relationen gefordert:

$$a^2 = axa = 0 \text{ für alle } x \in F$$

$$x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} = x_i + a \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$x_1^{p^{n_1}} = (x_1 + a)^{p^{n_1}} = 0$$

Wir führen folgende Abkürzung ein:

Es sei

$$z_i = x_i + a \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Die Elemente z_i erzeugen eine Unterhalbgebra L der Lie-Algebra von F .

In den folgenden Paragraphen werden wir zeigen, daß mit der Angabe von L das gewünschte Ziel erreicht ist.

Bevor wir den Nachweis der verlangten Eigenschaften vollziehen, seien einige sehr wichtige Beziehungen in F bzw. in L zusammengestellt.

Auf Grund der Relationen $a^2 = axa = 0$ in F gilt

$[a, \dots, a, \cdot] = 0$ und folglich $[a, \dots, x_i, \cdot] = [a, \dots, z_i, \cdot]$ für alle i

Damit und mit (1.1.2) und (1.1.3) folgt

$$\begin{aligned} z_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} &= (x_{i+1} + a)^{p^{n_{i+1}}} = x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} + [a, x_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}] = \\ &= z_i + [a, z_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}] \\ z_i &= z_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} - [a, z_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}] \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Hieraus findet man unter Ausnutzung von (1.1.2), (1.1.3) und (1.1.4) durch vollständige Induktion leicht folgende Verallgemeinerung von (2.1.1):

Für beliebige $i, k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i+k}^{p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}}} - [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+2}})}] \\ &\quad - [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+3}})}] \\ &\quad \vdots \\ &\quad - [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - 1)}] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Wegen (1.1.4) bedeutet dies für die inneren Derivationen von L folgendes:

$$\begin{aligned} \text{ad } z_i &= (\text{ad } z_{i+k})^{p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}}} - \text{ad } [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+2}})}] \\ &\quad - \text{ad } [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+3}})}] \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \text{ad } [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}} - 1)}] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Schließlich erhalten wir noch in F

$$-[z_i, z_{i+1}] = [z_{i+1}, x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}}] = [a, x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}}] = [a, z_i]$$

Also gilt

$$\begin{aligned} [a, z_i] &= [z_{i+1}, z_i] && \text{für alle } i \in \mathbb{N} \\ \text{d.h. } [a, z_i] &\in L' && \text{für alle } i \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Aus (2.1.3) folgt unmittelbar

$$[a, z_i] = [a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k} + \dots + n_{i+1}})}] \quad \text{für alle } i, k \in \mathbb{N} \quad (2.1.5)$$

Die Relationen $a^2 = axa = 0$ und $x_1^{p^{n_1}} = (x_1 + a)^{p^{n_1}} = 0$ liefern wegen (1.1.3)

$$\begin{aligned} [a, x_1^{(p^{n_1} - 1)}] &= 0 \\ \text{bzw. } [a, z_1^{(p^{n_1} - 1)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

§2. Nachweis von $Z(L) = 0$

Wir zeigen zunächst

Lemma 2.2.1: Sei $j_i = p^{n_i + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1)$ für $i \geq 2$,
 $j_1 = p^{n_1} - 1$.

Dann sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Elemente $[a, z_i^{(j)}]$ mit $j < j_i$ linear unabhängig.

Beweis: Wegen der Relationen von F und L ist $[a, z_i^{(j)}] \neq 0$ für $j < j_i$.

Sei $\sum_{1 \leq j < j_i} \alpha_j [a, z_i^{(j)}] = 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_p$.

Durch sukzessive Anwendung der Abbildungen $(\text{ad} z_i)^{j_i-1}, (\text{ad} z_i)^{j_i-2}, \dots, \text{ad} z_i$ auf die obige Summe erhält man

$$\alpha_j = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq j < j_i \quad \text{w.z.b.w.}$$

Um $Z(L) = 0$ zu beweisen, betrachten wir Unterhalbgebren L_i von L , die folgendermaßen definiert sind:

$$L_i = (z_i, \dots, z_1, [a, z_i], \dots, [a, z_1]) \quad , \quad i \in \mathbb{N}$$

Offenbar gilt $L_i \leq L_j$ genau dann, wenn $i \leq j$.

und
$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$
.

Wir betrachten zunächst nur L_i mit $i \geq 2$.

Vermöge (2.1.2) und (2.1.3) lassen sich alle Elemente von L_i durch z_i und $[a, z_1]$ ausdrücken.

Zieht man noch (2.1.5) und (2.1.6) heran, so erkennt man, daß sich jedes Element $z \in L_i$ in der folgenden Form schreiben läßt:

$$z = \sum_{j=1}^{j_i-1} \alpha_j [a, z_i^{(j)}] + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j z_i^{p^{n_1 + \dots + n_{j+1}}} + \beta_i z_i$$

$\alpha_j, \beta_j, \beta_i \in \mathbb{Z}_p$, j_i wie in Lemma 2.2.1 definiert.

Nun behaupten wir

Satz 2.2.1: $Z(L_i) = ([a, z_i^{(p^{n_1 + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1) - 1})}])$, $i \geq 2$

Beweis: Sei $z \in Z(L_i)$ beliebig. Dann ist z von der oben angegebenen Gestalt.

Weiter muß sein $[a, z_i], z] = 0$.

Wegen (1.1.4) bedeutet dies

$$y = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j [a, z_i^{(p^{n_1 + \dots + n_{j+1}} + 1)}] + \beta_i [a, z_i^{(2)}] = 0$$

Da wegen $p > 2$ auch $p^{n_1 + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)} > p^{n_1 + \dots + n_2 + 1}$, folgt nach Lemma 2.2.1

$$\beta_j = 0, \quad 1 \leq j \leq i.$$

Somit gilt für ein Zentrums-Element z mit geeigneten $\alpha_j \in \mathbb{Z}_p$

$$z = \sum_{j=1}^{j_i-1} \alpha_j [a, z_i^{(j)}]$$

Da $[z, z_i] = 0$, folgt wieder wegen Lemma 2.2.1

$$\alpha_j = 0, \quad 1 \leq j < j_i.$$

Andererseits folgt aus (2.1.5) bzw. (2.1.6) aber

$$[a, z_1^{(p^{n_1 + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1) - 1)}] \in Z(L_1)$$

Damit ist Satz 2.2.1 bewiesen.

Wenn man berücksichtigt, daß wegen $p > 2$ gilt $p^{n_1} - 2 > 0$, erhält man analog

$$Z(L_1) = ([a, z_1^{(p^{n_1} - 2)}])$$

Aus Satz 2.2.1 folgt unmittelbar

Satz 2.2.2: $Z(L) = 0$

Beweis: j_i sei wieder wie in Lemma 2.2.1 definiert.

(2.1.3) bzw. (2.1.5) liefern für alle $i \in \mathbb{N}$

$$[a, z_i^{(j_i - 1)}] = [a, z_{i+1}^{(j_{i+1} - p^{n_{i+1}})}]$$

Nach Satz 2.2.1 ergibt sich daraus

$$Z(L_i) \cap Z(L_{i+1}) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig und $x \in Z(L) \cap L_i$ beliebig.

Wegen $L_i \subseteq L_{i+1}$ ist dann auch $x \in Z(L) \cap L_{i+1}$.

Damit ergibt sich $x \in Z(L_i) \cap Z(L_{i+1})$.

Also $x = 0$

D.h. $Z(L) \cap L_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Daraus folgt $Z(L) = Z(L) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \right) =$
 $= \bigcup_{i=1}^{\infty} (Z(L) \cap L_i) = 0$

w.z.b.w.

§3. Kommutativität von L'

L erfüllt auch die Bedingung IV von I.§3.

Es gilt

Satz 2.3.1: L' ist kommutativ.

Beweis: Nach (2.1.4) ist $[a, z_i] \in L'$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten das Ideal

$$A = \langle [a, z_1], [a, z_2], \dots \rangle \subseteq L$$

Trivialerweise gilt $A \subseteq L'$.

Uns interessiert die Faktoralgebra L/A .

Sei $z_i + A, z_j + A \in L/A$ mit $i > j$.

Dann gilt nach (2.1.3)

$$\begin{aligned} [z_i + A, z_j + A] &= [z_i, z_j] + A = [z_i, z_i (p^{n_i + \dots + n_{j+1}})] \\ &\quad - [z_i, [a, z_i (p^{n_i + \dots + n_{j+1}} - p^{n_i + \dots + n_{j+1}})]] \\ &\quad - [z_i, [a, z_i (p^{n_i + \dots + n_{j+1}} - 1)]] + A \\ &= 0 + A \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß L/A kommutativ ist, d.h. $L' \subseteq A$.

Insgesamt ergibt sich so

$$L' = A.$$

Die Relationen $a^2 = axa = 0$ in F liefern die gewünschte Kommutativität von A und damit von L' .

§4. Die Idealisatorbedingung in L

Wir wollen schließlich nachweisen, daß L die Idealisatorbedingung erfüllt. Tatsächlich werden wir sogar eine Verschärfung dieser Eigenschaft zeigen. Es wird sich nämlich herausstellen, daß gilt:

Zu jeder Unterálgebra $U \subseteq L$ existieren ein (von U abhängiges) $n \in \mathbb{N}$ und Unterálgebren $U_1, \dots, U_n$ von L mit

$$U \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq L.$$

Um das zu zeigen, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Sei U eine beliebige Unterálgebra von L. Dann trifft sicher eine der folgenden drei Aussagen auf U zu.

- 1) $U \subseteq L'$
- 2) $(U+L')/L' \neq 0$ ist endlich erzeugbar
- 3) $(U+L')/L' \neq 0$ ist nicht endlich erzeugbar

Im ersten Fall ergibt sich wegen der Kommutativität von L' sofort

Satz 2.4.1: Ist U Unterálgebra von L und $U \subseteq L'$, so gilt

$$U \subseteq L' \subseteq L.$$

Ehe wir die beiden anderen Fälle behandeln, zeigen wir zunächst, daß alle inneren Derivationen von L nilpotent sind.

Sei K die von a und L erzeugte Unterálgebra der Lie-Algebra von F. Ferner sei B das Ideal $\langle a \rangle$ von K.

Offenbar ist $B = (a, A)$, wobei A das in §3 definierte Ideal von L ist.

Wenn $u \in K$ ist, so wollen wir die Restriktion der durch u induzierten inneren Derivation von K auf B mit $\bar{u}$ bezeichnen.

Die Abbildungen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots$ erzeugen eine assoziative Algebra D über Z_p .

Wegen der definierenden Relationen von F und wegen $L' = A$ ist D offenbar kommutativ. Darüber hinaus gelten wegen (2.1.5) und (2.1.6) die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}\bar{z}_{i+1} p^{n_{i+1}} &= \bar{z}_1 & \text{für alle } i \in \mathbb{N} \\ \bar{z}_1 p^{n_1-1} &= 0\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Daraus erhält man

Lemma 2.4.1: Jede Abbildung $\bar{u} \in D$ ist nilpotent.

Beweis: Sei $\bar{u} \in D$ beliebig. Wegen (2.4.1) existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\bar{u} = \sum_{j \geq 1} \alpha_j \bar{z}_k^j, \quad \alpha_j \in Z_p$$

Hieraus folgt, wieder wegen (2.4.1),

$$\bar{u} p^{n_k + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)} = \sum_{j \geq 0} \beta_j \bar{z} p^{n_k + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1) + j} = 0, \quad \beta_j \in Z_p$$

Also ist $\bar{u}$ nilpotent.

w.z.b.w.

Hieraus ergibt sich sofort das angekündigte Resultat:

Korollar 2.4.1: Jede innere Derivation von L ist nilpotent.

Beweis: Seien x und z beliebige Elemente von L.

Für jedes $n \geq 2$ gilt dann

$$x(\operatorname{ad} z)^n = [x, z^{(n)}] = [x, z] \bar{z}^{n-1}$$

Wegen der Nilpotenz von $\bar{z}$ ist dann für genügend großes n

$$x(\operatorname{ad} z)^n = 0.$$

Da x und z beliebig waren, folgt die Behauptung.

Wir können jetzt Fall 2) behandeln. Zunächst zeigen wir

Satz 2.4.2: Ist U Untereralgebra von L und $(U+L')/L'$ endlich erzeugbar, so ist $U+L'$ nilpotent.

Beweis: Es existieren endlich viele Elemente $u_1, \dots, u_n \in U$ mit

$$U + L' = (u_1, \dots, u_n) + L'.$$

Dann muß es ein $i \in \mathbb{N}$ geben mit

$$U + L' = (u_1, \dots, u_n) + L' \subseteq (z_1, \dots, z_i) + L'.$$

Zum Beweis des Satzes genügt es dann, die Nilpotenz von $(z_1, \dots, z_i) + L'$ nachzuweisen.

Wir setzen $k_0 = p^{n_1 + \dots + n_i} + 2$

Weiter betrachten wir ein beliebiges Element

$$v = [v_1, \dots, v_{k_0}], \quad v_k \in (z_1, \dots, z_i) + L' \quad \text{für } 1 \leq k \leq k_0$$

Von Interesse sind für uns lediglich die v_k mit $k \geq 2$.

Ist ein solches $v_k \in L'$, so ist $v = 0$, da L' abelsch ist. Es genügt also offenbar, solche v_k zu betrachten, die sich als Summen der Elemente $z_1, \dots, z_i$ schreiben lassen.

Mit (2.4.1) erhält man nun

$$v = \sum_{j \geq 1} \alpha_j [v_1, v_2] \bar{z}_i^{k_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_p, \quad k_j \geq k_0 - 2 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

(2.4.1) liefert jetzt $v = 0$.

Also ist $(z_1, \dots, z_i) + L'$ und damit $U + L'$ nilpotent von einer Klasse, die nicht größer als k_0 ist.

w.z.b.w.

Natürlich ist $U + L' \subseteq L$. Damit und mit Satz 1.1.1 folgt jetzt aus Satz 2.4.2 das gewünschte Resultat:

Satz 2.4.3: Ist U Unterlgebra von L und $(U+L')/L' \neq 0$ endlich erzeugbar, so existieren endlich viele Unterlgebren $U_1, \dots, U_n$ von L , $U_n = U + L'$, mit

$$U \subseteq U_1 \subseteq \dots \subseteq U_n \subseteq L.$$

Im Fall 3) gilt der folgende

Satz 2.4.4: Wenn U Unterlgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann ist U Ideal von L .

Beweis: Sei $U \subseteq L$ und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar.

Der Beweis wird in mehreren Schritten verlaufen.

Zunächst werden wir zeigen, daß $I(U) + L' = L$. Daraus ergibt sich dann $I(U) \cap L' \subseteq L$ und schließlich $L' \subseteq I(U)$. Das liefert $I(U) = L$.

Die von den Abbildungen $\text{ad } u, u \in U$, erzeugte Unterlgebra von A_L heiße V .

Wenn dann $\text{ad } x \in V$ für ein $x \in L$, so folgt offenbar $x \in I(U)$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben.

Da $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, existieren ein $i \geq k$ und ein Element

$$y = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_i z_i + w \in U, \quad w \in L', \quad \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \quad \alpha_i \neq 0$$

Vermöge (2.1.3) gilt

$$\text{ad } y = \alpha_1 \text{ad } z_1 + \dots + \alpha_i \text{ad } z_i p^{n_1 + \dots + n_i} + \text{ad } v, \quad v \in L'$$

Da $\text{ad } y^k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und da $\text{ad } y$ und $\text{ad } z_i$ nach Korollar 2.4.1 nilpotent sind, erhält man mit (1.1.9) schließlich

$$\text{ad } z_i + \text{ad } v_i \in V \quad \text{mit } v_i \in L'$$

d.h.

$$u_i = z_i + v_i \in I(U)$$

Falls $i > k$ sein sollte, folgt nach (1.1.9) und (2.1.3)

$$\text{ad } u_i p^{n_i + \dots + n_{k+1}} = \text{ad } z_k + \text{ad } v_k \in V \quad \text{mit } v_k \in L'$$

d.h.
$$u_k = z_k + v_k \in I(U)$$

Wir gelangen so zu der Erkenntnis, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element

$$u_n = z_n + v_n \in I(U), \quad v_n \in L'$$

existiert.

Damit hat man
$$I(U) + L' = L$$

Sei nun $x \in I(U) \cap L'$ beliebig.

Da L' kommutativ ist, folgt

$$x \text{ad } z_n = x \text{ad } u_n \in I(U) \cap L' \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Das aber bedeutet

$$I(U) \cap L' \subseteq I$$

Sei nun ein $i \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Es existiert ein $i_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$v_i = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k [a, z_{i_1}^{(k)}], \quad \gamma_k \in \mathbb{Z}_p$$

Wir wählen ein $l > k_0$ beliebig aber fest.

Dann existiert ein $j \geq \max \{i+1, i_1\}$ mit

$$v_{i+1} = \sum_{k \geq 1} \delta_k [a, z_j^{(k)}], \quad \delta_k \in \mathbb{Z}_p$$

Wir betrachten das Element

$$p = [u_{i+1}, u_i] = [z_{i+1}, z_i] + [v_{i+1}, z_i] - [v_i, z_{i+1}] \in I(U) \cap L'$$

Nach (2.1.3) besteht $[z_{i+1}, z_i]$ aus l verschiedenen Summanden der Form

$$[a, z_{i+1}^{(k)}] \quad \text{mit } 1 \leq k \leq p^{n_{i+1} + \dots + n_{i+1}}$$

bzw.
$$[a, z_j^{(k)}] \quad \text{mit } k \leq p^{n_j + \dots + n_{i+1}}$$

Da $k_0 < 1$, können nicht alle Summanden von $[z_{i+1}, z_i]$ durch die Summanden von $[v_i, z_{i+1}]$ weggehoben werden.

$[v_{i+1}, z_i]$ setzt sich zusammen aus Summanden der Form

$$[a, z_j^{(k + p^{n_j + \dots + n_{i+1}})}] ,$$

d.h. die Summanden von $[z_{i+1}, z_i]$ und $[v_{i+1}, z_i]$ sind alle paarweise verschieden.

Aufgrund dieser Überlegungen kann man schreiben

$$p = \sum_{k \geq 1} \xi_k [a, z_j^{(k)}] , \quad \xi_k \in \mathbb{Z}_p ,$$

wobei $\xi_{l_0} \neq 0$ für mindestens ein $l_0 \leq p^{n_j + \dots + n_{i+1}}$.

Da $I(U) \cap L' \subseteq L$, folgt

$$p a d z_j^k \in I(U) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} ,$$

und da $ad z_j$ nilpotent ist, erhält man

$$[a, z_j^{(l_0)}] \in I(U)$$

und weiter $[a, z_j^{(p^{n_j + \dots + n_{i+1}})}] = [a, z_i] \in I(U)$.

Da i beliebig war, haben wir

$$[a, z_i] \in I(U) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

Mit $I(U) \cap L' \subseteq L$ ergibt sich

$$L' = \langle [a, z_i] \mid i \in \mathbb{N} \rangle \subseteq I(U) .$$

Ziehen wir $I(U) + L' = L$ heran, so erhalten wir

$$I(U) = L .$$

w.z.b.w.

Satz 2.4.1 , 2.4.3 und 2.4.4 lassen sich zusammenfassen in

Satz 2.4.5: Die in II.§1. konstruierten Lie-Algebren erfüllen die Idealisatorbedingung.

Satz 2.4.4 gestattet eine Verschärfung, die bei späteren Beweisen willkommene Vereinfachungen bringen wird.

Satz 2.4.6: Wenn U Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann gilt $L' \subseteq U$.

Beweis: Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Da $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, existiert ein $j > i$ mit

$$u_j = \alpha_j z_j + \dots + \alpha_1 z_1 + w \in U, w \in L', \alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{Z}_p, \alpha_j \neq 0$$

Wegen $U \subseteq L$ hat man dann $u = [a, z_j, u_j] \in U$.

(2.1.3) liefert

$$u = \alpha_j [a, z_j^{(2)}] + \alpha_{j-1} [a, z_j^{(p^{n_j}+1)}] + \dots + \alpha_1 [a, z_j^{(p^{n_j+\dots+n_2}+1)}]$$

Da nach Korollar 2.4.1 $\text{ad } z_j$ nilpotent ist, $[u, z_j^{(k)}] \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_j \neq 0$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir

$$[a, z_j^{(2)}] \in U.$$

$U \subseteq L$ zieht nun

$$[a, z_j^{(2)}, z_j^{(p^{n_j+\dots+n_{i+1}}-2)}] = [a, z_i] \in U$$

nach sich.

Da i beliebig war, folgt die Behauptung.

Die Unteralgebren vom Typ 3) haben noch weitere wichtige Eigenschaften.

Zunächst gilt

Lemma 2.4.2: Wenn U Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann ist A_L schon aus allen inneren Derivationen $\text{ad } u$ mit $u \in U$ erzeugbar.

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Derivation $\text{ad } z_i$ durch Derivationen $\text{ad } u$ mit $u \in U$ ausgedrückt werden kann.

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $j > i$ mit

$$z = \alpha_j z_j + \dots + \alpha_1 z_1 \in U, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{Z}_p, \quad \alpha_j = 1$$

Nach (2.1.3) ist

$$\text{ad } z = \text{ad } z_j + \dots + \alpha_1 (\text{ad } z_j)^{p^{n_j + \dots + n_1}} + \text{ad } v, \quad v \in L'$$

Da $L' \subseteq U$, folgt $y = z - v \in U$.

$$\text{ad } y = \text{ad } z_j + \dots + \alpha_1 (\text{ad } z_j)^{p^{n_j + \dots + n_1}}$$

läßt sich daher durch Derivationen $\text{ad } u$ mit $u \in U$ ausdrücken.

Da $\text{ad } y$ nach Korollar 2.4.1 nilpotent ist, kann man $\text{ad } z_j$ jetzt als Summe von Potenzen von $\text{ad } y$ schreiben:

$$\text{ad } z_j = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\text{ad } y)^k, \quad \beta_k \in \mathbb{Z}_p$$

Daher liegt auch $\text{ad } z_j$ in der von den $\text{ad } u$, $u \in U$, erzeugten Unterálgebra von A_L .

Nach (2.1.3) ist

$$\text{ad } z_i = (\text{ad } z_j)^{p^{n_j + \dots + n_{i+1}}} - \text{ad } w, \quad w \in L' \subseteq U$$

Diese Beziehung liefert den Abschluß des Beweises.

Eine unmittelbar einsichtige Konsequenz aus Lemma 2.4.2 ist

Satz 2.4.7: Sei U Unterálgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Ferner sei X ein Ideal von U . Dann ist X auch Ideal von L .

Weiter können wir Lemma 2.4.2 verwenden, um zwei Sätze zu beweisen, die wir später noch benötigen werden.

Satz 2.4.8: Sei U Unter algebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Dann ist $U' = L'$.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß $[a, z_i] \in U'$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 2.4.2 gilt dann für das Ideal $L' = \langle [a, z_1], [a, z_2], \dots \rangle$ von L sicher $L' \subseteq U'$. Da ohnehin $U' \subseteq L'$, wäre die Behauptung gezeigt.

Sei also $i \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben.

Wegen $L' \subseteq U$ gilt $[a, z_{i+1}] \in U$.

Weiter kann man nach Lemma 2.4.2 $(\text{adz}_{i+1})^p^{n_{i+1}-1}$ durch Derivationen $\text{ad } u$, $u \in U$, ausdrücken.

Wir haben dann:

$$[a, z_i] = [a, z_{i+1}] (\text{adz}_{i+1})^p^{n_{i+1}-1} \in U$$

w.z.b.w.

Satz 2.4.9: Sei U Unter algebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Dann ist $Z(U) = 0$.

Beweis: Seien $x \in L$ und $z \in Z(U)$ beliebig.

Nach Lemma 2.4.2 ist $\text{ad } x$ durch Derivationen $\text{ad } u$, $u \in U$, ausdrückbar.

Damit ergibt sich

$$[z, x] = z \text{ad } x = 0.$$

D.h. $z \in Z(L)$.

Da $Z(L) = 0$ ist, folgt $z = 0$ und da z beliebig war

$$Z(U) = 0.$$

w.z.b.w.

III. ISOMORPHIEBETRACHTUNGEN

§1. Isomorphie der konstruierten Lie-Algebren

Alle in diesem Paragraphen betrachteten Algebren sollen denselben Skalarenkörper Z_p haben.

In II. wurde jeder Folge natürlicher Zahlen eine Lie-Algebra über Z_p zugeordnet. Dabei ist es natürlich sehr wichtig zu wissen, "wieviel" wesentlich verschiedene Lie-Algebren man auf diese Weise erhalten hat, d.h. unter welchen Voraussetzungen zwei der erhaltenen Lie-Algebren isomorph sind.

Da die Glieder der definierenden Folgen die definierenden Relationen entscheidend bestimmen und diese wiederum die Ordnungen der inneren Derivationen festlegen, kann man hoffen, die Isomorphiefrage dadurch zu lösen, daß man die Ordnungen der inneren Derivationen bestimmt. Für isomorphe Lie-Algebren müssen die Mengen dieser Ordnungen ja gleich sein.

Sei also L durch die Folge $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiert.

Sehr leicht ist die Frage für Elemente aus L' zu beantworten.

Sei $g \in L'$, $g \neq 0$.

Da $Z(L) = 0$, ist $\text{ord}(\text{ad } g) > 1$.

Da L' kommutativ ist, ist $\text{ord}(\text{ad } g) \leq 2$.

Insgesamt gilt also $\text{ord}(\text{ad } g) = 2$.

Schwieriger ist die Frage für die übrigen Elemente von L .

Wir betrachten ein Element

$$y = \xi_1 z_1 + \dots + \xi_i z_i + w \in L, \quad \xi_1, \dots, \xi_i \in Z_p, \quad \xi_i \neq 0, \quad w \in L'$$

Offensichtlich ist $\text{ord}(\text{ad } y) = \text{ord}(\text{ad } \xi_i^{-1} y)$. Wir können also den Koeffizienten von z_i zu 1 normieren, d.h. wir können von vornherein annehmen, daß $\xi_i = 1$ ist.

Zunächst sei $i > 1$. Wegen (2.4.1) ergibt sich schnell

$$\text{ord}(\text{ad } y) \leq p^{n_1 + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1) + 1 \quad (3.1.1)$$

Wir setzen zur Abkürzung $\omega_1 = p^{n_1 + \dots + n_l}(p^{n_1} - 1) + 1, i \in \mathbb{N}$.

Wir werden sehen, daß $\text{ord}(\text{ad } y)$ tatsächlich gleich der angegebenen Schranke ist.

Nach (2.3.1) existiert ein $j > 1, j \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{aligned} \text{ad } y &= (\text{adz}_j)^{p^{n_j + \dots + n_{l+1}}} + \dots + \varepsilon_1 (\text{adz}_j)^{p^{n_j + \dots + n_l}} + \\ &+ \sum_{r \geq 1} \alpha_r \text{ad}[a, z_j^{(r)}], \quad \alpha_r \in \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß z.B. für alle $i \in \mathbb{N}$

$$[z_{i+1}, z_i^{(\omega_i - 1)}] = 0 \quad \text{aber} \quad [z_{i+2}, z_i^{(\omega_i - 1)}] \neq 0,$$

also in der Tat $\text{ord}(\text{ad } z_i) = \omega_i$ ist.

Deshalb drücken wir auch $\text{ad } y$ in Abhängigkeit von z_{j+2} aus. Das geht wieder vermöge (2.1.3). Im Einzelnen ist:

$$\begin{aligned} (\text{adz}_j)^{p^{n_j + \dots + n_{l+1}}} &= ((\text{adz}_{j+2})^{p^{n_{j+2} + n_{j+1}}} - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + n_{j+1}} - p^{n_{j+2}})}] \\ &\quad - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + n_{j+1}} - 1)}])^{p^{n_j + \dots + n_{l+1}}} = \\ &= (\text{adz}_{j+2})^{p^{n_{j+2} + \dots + n_{l+1}}} - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_{l+1}} - p^{n_{j+2}})}] \\ &\quad - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_{l+1}} - 1)}] \\ &\quad \vdots \\ (\text{adz}_j)^{p^{n_j + \dots + n_l}} &= (\text{adz}_{j+2})^{p^{n_{j+2} + \dots + n_l}} - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_l} - p^{n_{j+2}})}] \\ &\quad - \text{ad}[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_l} - 1)}] \\ &\quad \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \alpha_r \text{ad}[a, z_j^{(r)}] &= \sum_{r \geq 1} \alpha_r \text{ad}[a, z_{j+2}^{(rp^{n_{j+2} + n_{j+1}})}] \end{aligned}$$

Ziel ist es jetzt zu zeigen, daß $[z_{j+2}, y^{(\omega_i - 1)}] \neq 0$ ist.

Dazu rechnen wir zunächst $(\text{ad } y)^{\omega_i - 1}$ aus.

Bei genauer Durchrechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (\text{ad } y)^{\omega_i-1} = & \sum_{r \geq 1} \beta_r (\text{adz}_{j+2})^{r p^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}} - \\
 & - \sum_{r \geq 0} \gamma_r \text{ad} [a, z_{j+2}^{(\rho(r))}] + \\
 & + \sum_{s \geq 1} \sum_{t \geq 0} \delta_{s,t} \text{ad} [a, z_{j+2}^{(\sigma(s,t))}]
 \end{aligned}$$

Dabei ist im Einzelnen:

$$\beta_r, \gamma_r, \delta_{s,t} \in \mathbb{Z}_p$$

$$\rho(r) = p^{n_{j+2}+\dots+n_2}(p^{n_1}-1) - p^{n_{j+2}+r} \quad r \in \mathbb{N}_0$$

$$\sigma(s,t) = s p^{n_{j+2}+n_{j+1}} + t p^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}} \quad s \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}_0$$

Speziell für y_0 erhält man $\gamma_0 = 1$.

Damit hat man

$$\begin{aligned}
 z_{j+2}(\text{ad } y)^{\omega_i-1} = & \sum_{r \geq 0} \gamma_r [a, z_{j+2}^{(\rho(r)+1)}] - \\
 & - \sum_{s \geq 1} \sum_{t \geq 0} \delta_{s,t} [a, z_{j+2}^{(\sigma(s,t)+1)}]
 \end{aligned}$$

Wichtig ist für uns der Term

$$\gamma_0 [a, z_{j+2}^{(\rho(0)+1)}]$$

Auf Grund der definierenden Relationen ist

$$[a, z_{j+2}^{(\rho(0)+1)}] = [a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2}(p^{n_1}-1) - p^{n_{j+2}} + 1)}] \neq 0$$

Ferner ist $\rho(0)+1 \neq \sigma(s,t)+1$ für alle in Frage kommenden r, s, t .

Dies folgt so:

$$\text{Es ist } \rho(0) \equiv p^{n_{j+2}}(p^{n_{j+1}}-1) \pmod{p^{n_{j+2}+n_{j+1}}},$$

$$\sigma(s,t) \equiv 0 \pmod{p^{n_{j+2}+n_{j+1}}} \text{ für alle } s, t,$$

$$\text{also } \rho(0) \not\equiv \sigma(s,t) \pmod{p^{n_{j+2}+n_{j+1}}} \text{ für alle } s, t.$$

Also ist insbesondere $\rho(0) \neq \sigma(s,t)$ für alle s, t .

Wir können daher auch schreiben

$$\begin{aligned} [z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] &= \gamma_0 [a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2}(p^{n_1}-1)-p^{n_{j+2}+1})}] \\ &\quad + \sum_{r=1}^{p(0)} \mu_r [a, z_{j+2}^{(r)}] \\ &\quad + \sum_{r \geq p(0)+2} \mu_r [a, z_{j+2}^{(r)}] \quad , \quad \mu_r \in \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.1 sind die Elemente $[a, z_{j+2}^{(r)}] \neq 0$ linear unabhängig.

Wäre daher $[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] = 0$, so folgte $\gamma_0 = 0$ wegen

$$[a, z_{j+2}^{(p(0)+1)}] \neq 0.$$

Da aber $\gamma_0 = 1$ ist, hat man

$$[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] \neq 0,$$

$$\text{d.h.} \quad \text{ord}(\text{ad } y) > \omega_1 - 1 \quad (3.1.2)$$

(3.1.1) und (3.1.2) ergeben zusammen

$$\text{ord}(\text{ad } y) = \omega_1$$

Abschließend sei noch der Fall $i=1$ behandelt.

$$\text{Sei} \quad z = z_1 + v \in L, \quad v \in L'.$$

(O.B.d.A. ist der Koeffizient von z_1 wieder 1.)

$$\text{Wir setzen} \quad \omega_1 = p^{n_1}.$$

$$(2.4.1) \text{ liefert} \quad \text{ord}(\text{ad } z) \leq \omega_1 \quad (3.1.3)$$

Wie im Fall $i > 1$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$, mit

$$\text{ad } z = (\text{adz}_j)^{p^{n_1} + \dots + n_L} + \sum_{r \geq 1} \int_r [\bar{a}, z_j^{(r)}] \quad , \quad \int_r \in \mathbb{Z}_p$$

$$\begin{aligned} (\text{adz}_j)^{p^{n_1} + \dots + n_L} &= (\text{adz}_{j+2})^{p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} - \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}} + \dots + n_L - p^{n_{j+2}})}] \\ &\quad - \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}} + \dots + n_L - 1)}] \end{aligned}$$

$$\sum_{r \geq 1} \int_r \text{ad} [\bar{a}, z_j^{(r)}] = \sum_{r \geq 1} \int_r \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(rp^{n_{j+2}} + n_{j+2}})]$$

$$\begin{aligned} (\text{adz})^{\omega_1 - 1} &= (\text{adz}_{j+2})^{p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} (p^{n_1} - 1) - \\ &\quad - \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} (p^{n_1} - 1) - p^{n_{j+2}})] \\ &\quad - \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} (p^{n_1} - 1) - 1)] \\ &\quad + \sum_{r \geq 1} \int_r \text{ad} [\bar{a}, z_{j+2}^{(rp^{n_{j+2}} + n_{j+2}} + p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} (p^{n_1} - 2))] \end{aligned}$$

Genau wie im Fall $i > 1$ ergibt sich wieder wegen

$$\begin{aligned} [\bar{a}, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}} + \dots + n_L} (p^{n_1} - 1) - p^{n_{j+2}} + 1)] &\neq 0 \\ z_{j+2} (\text{adz})^{\omega_1 - 1} &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{D.h.} \quad \text{ord}(\text{ad } z) > \omega_1 - 1 \quad (3.1.4)$$

(3.1.3) und (3.1.4) liefern

$$\text{ord}(\text{ad } z) = \omega_1$$

Wir wollen diese Ergebnisse zusammenfassen in

Satz 3.1.1: Sei L durch die Folge $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiert.

Sei ferner $\omega_i = p^{n_i + \dots + n_L} (p^{n_1} - 1) + 1 \quad i \in \mathbb{N}, i > 1$

$$\omega_1 = p^{n_1}$$

Dann gilt für ein Element

$$y = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_L z_L + u \in L, \alpha_1, \dots, \alpha_L \in \mathbb{Z}_p, \alpha_1 \neq 0, u \in L'$$

$$\text{ord}(\text{ad } y) = \omega_1.$$

Für ein Element $v \in L'$, $v \neq 0$, gilt

$$\text{ord}(\text{ad } v) = 2.$$

Damit läßt sich nun die Isomorphiefrage ganz leicht beantworten. Es gilt

Satz 3.1.2: Seien zwei Lie-Algebren L_1 und L_2 durch die Folgen $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definiert. Dann ist $L_1 \cong L_2$ genau dann, wenn die definierenden Folgen gleich sind.

Beweis: Es sei $L_1 \cong L_2$. Die Menge aller Ordnungen von inneren Derivationen von L_1 ist $\{1, 2, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ mit $2 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$, die der inneren Derivationen von L_2 ist $\{1, 2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots\}$ mit $2 < \bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_2 < \dots$.

Beide Mengen müssen gleich sein. Das bedeutet

$$\omega_i = \bar{\omega}_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } p^{n_1 + \dots + n_i}(p^{n_1} - 1) &= p^{m_1 + \dots + m_i}(p^{m_1} - 1) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}, i > 1 \\ p^{n_1} &= p^{m_1} \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt hieraus unmittelbar

$$n_i = m_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Daß gleiche Folgen isomorphe Algebren definieren, ist klar. Damit ist der Satz bewiesen.

Mit diesem letzten Satz ist nunmehr sichergestellt, daß die von uns definierten Lie-Algebren tatsächlich alle wesentlich voneinander verschieden sind.

Wir zeigen schließlich noch einen Satz, der im nächsten Paragraphen wertvolle Hilfe leisten wird.

Satz 3.1.3: Die Lie-Algebren L_1 und L seien nach II.§1. durch die Folgen $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{n_{c+i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{N}_0$, definiert. Dann existiert ein Ideal $X_1 \subseteq L_1$ mit

$$L_1/X_1 \cong L.$$

Beweis: L_1 werde von den Elementen z_1 erzeugt, L von den Elementen y_1 . An die Stelle des Elementes a bei der Definition von L_1 trete bei der Definition von L das Element b .

Sei

$$X_1 = \langle [a, z_{c+1}^{(p^{n_{c+1}} - 1)}], z_j \mid j \in \mathbb{N}, j \leq c \rangle \subseteq L_1$$

Wir definieren eine Abbildung $\varphi: L_1/X_1 \longrightarrow L$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \geq 1} \alpha_i z_{c+i} + \sum_{k \geq 1} \beta_k [a, z_{c+i_k}^{(1_k)}] + X_1 \right) \varphi = \\ & = \sum_{i \geq 1} \alpha_i y_i + \sum_{k \geq 1} \beta_k [b, y_{i_k}^{(1_k)}] \quad , \quad \alpha_i, \beta_k \in \mathbb{Z}_p, i_k, 1_k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß φ ein Isomorphismus ist.

Zunächst zeigen wir, daß φ eine Bijektion ist.

Es ist $[b, y_{i_k}^{(1_k)}] = 0$ genau dann, wenn

$$1_k \geq p^{n_{c+i_k} + \dots + n_{c+2}} (p^{n_{c+1}} - 1) ,$$

$[a, z_{c+i_k}^{(1_k)}] + X_1 = 0 + X_1$ genau dann, wenn

$$1_k \geq p^{n_{c+i_k} + \dots + n_{c+2}} (p^{n_{c+1}} - 1) .$$

Ferner ist $z_j + X_1 = 0 + X_1$ für $j \leq c$.

Damit ist die Injektivität von φ nachgewiesen. Die Surjektivität ist auf Grund der Definition von φ trivial.

Es bleibt noch zu zeigen, daß φ ein Homomorphismus ist.

Die Linearität von φ ist offensichtlich.

Da L_1/X_1 von den Elementen $z_{c+i} + X_1$ erzeugt werden kann, genügt es zur Vervollständigung des Beweises zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} ([z_{c+i_1}, z_{c+i_2}] + X_1)\varphi &= \\ &= [(z_{c+i_1} + X_1)\varphi, (z_{c+i_2} + X_1)\varphi] = \\ &= [y_{i_1}, y_{i_2}] \quad \text{für alle } i_1, i_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Beziehung (2.1.3), die definierenden Folgen von L_1 und L , sowie die Definition von φ , so ist diese gewünschte Eigenschaft von φ sofort zu verifizieren.

Satz 3.1.3 ist damit bewiesen.

§2. Direkte Produkte von Lie-Algebren

Wieder sei generell vorausgesetzt, daß alle in diesem Paragraphen behandelten Algebren denselben Skalarenkörper Z_p haben.

Ehe wir uns dem eigentlichen Ziel zuwenden, wollen wir eine Definition treffen, die uns viele Formulierungen erleichtern wird.

L sei eine beliebige in II.§1. definierte Lie-Algebra über Z_p mit der definierenden Folge $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. X sei ein Ideal von L .

Unser Ziel ist es, in $(L/X)'$ eine Ordnungsrelation einzuführen.

Sei $h_1 + X, h_2 + X \in (L/X)'$, beide Elemente ungleich $0 + X$.

Dann existieren Zahlen $j, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$h_1 + X = \sum_{i \geq 0} \alpha_i [a, z_j^{(k_1+i)}] + X, \quad \alpha_i \in Z_p, \quad \alpha_0 \neq 0$$

$$h_2 + X = \sum_{i \geq 0} \beta_i [a, z_j^{(k_2+i)}] + X, \quad \beta_i \in Z_p, \quad \beta_0 \neq 0$$

Wir schreiben dann

$$h_1 + X \equiv h_2 + X \quad \text{genau dann, wenn } k_1 \leq k_2$$

$$h_1 + X \subsetneq h_2 + X \quad \text{genau dann, wenn } k_1 < k_2$$

$$h_1 + X \sim h_2 + X \quad \text{genau dann, wenn } k_1 = k_2$$

$$\text{Wegen } [a, z_j^{(k+i)}] = [a, z_{j+1}^{(p^{n_{j+1}+\dots+n_{j+1}}(k+i))}]$$

hängen diese Definitionen nicht von der speziellen Wahl von j ab und sind darum erst sinnvoll.

Wenn wir überdies noch setzen

$$h + X \subseteq 0 + X \quad \text{für alle } h + X \in (L/X)'$$

$$\text{bzw.} \quad h + X \subsetneq 0 + X, \quad \text{falls } h + X \neq 0 + X,$$

wird durch " $\equiv$ " in $(L/X)'$ eine Totalordnung definiert. " $\subsetneq$ " definiert die zugehörige strikte Ordnung.

Folgende Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Ordnungsrelation:

Wenn $h_1 + X, h_2 + X \in (L/X)'$, $h_1 + X \subseteq h_2 + X$, $u + X \in L/X$, dann ist

$$\begin{aligned} h_1 + X &\subseteq [h_1, u] + X \\ [h_1, u] + X &\subseteq [h_2, u] + X \\ h_1 + X &\subset [h_1, u] + X && \text{falls } h_1 + X \neq 0 + X \\ [h_1, u] + X &\subset [h_2, u] + X && \text{falls } [h_1, u] + X \neq 0 + X \\ &&& \text{und } h_1 + X \subset h_2 + X \\ h_1 + h_2 + X &\sim h_1 + X && \text{falls } h_1 + X \subset h_2 + X \\ [h_1, u] + X &\sim [h_2, u] + X && \text{falls } h_1 + X \sim h_2 + X \end{aligned}$$

Wie die Struktur des Verbandes der Hauptideale von L/X , die in $(L/X)'$ liegen, mit der eben definierten Ordnungsrelation zusammenhängt, zeigt

Lemma 3.2.1: Seien $u + X, v + X \in (L/X)'$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle u + X \rangle &\subseteq \langle v + X \rangle && \text{genau dann, wenn } u + X \subseteq v + X \\ \langle u + X \rangle &\subset \langle v + X \rangle && \text{genau dann, wenn } u + X \subset v + X \\ \langle u + X \rangle &= \langle v + X \rangle && \text{genau dann, wenn } u + X \sim v + X \end{aligned}$$

Die Beweise für diese Beziehungen sind an der Definition der Ordnung unmittelbar abzulesen.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir uns der Frage zuwenden, wann direkte Produkte der konstruierten Lie-Algebren ebenfalls den gestellten Forderungen genügen.

Die Zentrumsfreiheit und die Kommutativität der Kommutatoralgebra vererben sich offensichtlich auf die direkten Produkte. Schwieriger ist die Frage nach Erfüllung der Idealisatorbedingung zu beantworten.

In I.§2. haben wir gesehen, daß das direkte Produkt zweier Lie-Algebren genau dann ungeeignet ist, wenn die Algebren

Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren ungleich 0 und Zentrum 0 haben.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann zwei der konstruierten Lie-Algebren diese Eigenschaft haben.

Zunächst zeigen wir

Lemma 3.2.2: L sei die nach II.§1. durch die Folge $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ definierte Lie-Algebra. U sei Unter algebra von L, X Ideal von U mit

$$U/X \neq 0, \quad Z(U/X) = 0$$

Sei $u + X = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_l z_l + u' + X \in U/X, \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{Z}_p, \alpha_1 \neq 0, u' \in L'$
 $v + X = \beta_j z_j + \dots + \beta_1 z_1 + v' + X \in U/X, \beta_j, \dots, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p, \beta_j \neq 0, v' \in L'$

mit $\text{ord Rest}_{(U/X)} \text{ad}(u+X) \geq 2$

Dann ist

$$\text{ord Rest}_{(U/X)} \text{ad}(v+X) < \text{ord Rest}_{(U/X)} \text{ad}(u+X)$$

genau dann, wenn $j < l$.

Beweis: In II.§4. wurden drei Typen von Unter algebraen unterschieden. U muß vom Typ 3) sein, da Unter algebraen vom Typ 1) oder 2) nilpotent sind und daher keine Faktoralgebren ungleich 0 mit Zentrum 0 besitzen können.

X kann wiederum nicht vom Typ 3) sein, da dann nach Satz 2.4.6 und Satz 2.4.8 gelten würde $U' = L' \subseteq X$. U/X wäre demnach kommutativ.

Also ist X vom Typ 1) oder 2).

Da $X \subseteq U$, gilt $X \subseteq L$ nach Satz 2.4.7.

Wir wollen das benutzen, um näheren Aufschluß über X zu erhalten.

Zunächst sei der Fall betrachtet, daß ein Element der Form

$$x = \rho_k z_k + \dots + \rho_1 z_1 + x' \in X, \quad x' \in L', \quad \rho_k, \dots, \rho_1 \in \mathbb{Z}_p, \quad \rho_k \neq 0$$

existiert. Dann existiert ein $c \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x = f_k z_k + \dots + f_1 z_1 + \sum_{n \geq 1} \zeta_n [a, z_{k+c}^{(n)}] , \zeta_n \in \mathbb{Z}_p$$

Sei $l \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $l \geq c+1$.

Wegen $X \subseteq L$ ist dann $[z_{k+1}, x] \in X$.

Berechnet man mit (2.1.3) den Term $[z_{k+1}, x]$ explizit, so erhält man

$$[z_{k+1}, x] = \sum_{r \geq r_0} \gamma_r [a, z_{k+1}^{(r)}] , \gamma_r \in \mathbb{Z}_p$$

wobei $r_0 \leq p^{n_{k+1} + \dots + n_{k+1}}$ und $\gamma_{r_0} \neq 0$ ist.

Durch wiederholtes Anwenden der nilpotenten Abbildung $\text{ad } z_{k+1}$ erhält man zunächst

$$[a, z_{k+1}^{(r_0)}] \in X$$

Da $r_0 \leq p^{n_{k+1} + \dots + n_{k+1}}$, folgt weiter

$$[a, z_{k+1}^{(p^{n_{k+1} + \dots + n_{k+1}})}] = [a, z_k] \in X .$$

Daraus ergibt sich sofort

$$[a, z_k] \in X \text{ für alle } k \leq k .$$

Da, wie wir schon sahen, $L' \subseteq X$ nicht sein darf, kann auch nicht $[a, z_r] \in X$ für alle $r \in \mathbb{N}$ gelten.

Es existiert daher ein $i_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $[a, z_r] \in X$ genau dann, wenn $r < i_0$.

Ferner folgt dann aus

$$f_r z_r + \dots + f_1 z_1 + d \in X , d \in L' , f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}_p , f_r \neq 0$$

stets $r < i_0$.

Damit läßt sich der Durchschnitt $X \cap L' = X \cap U'$ folgendermaßen charakterisieren:

Es existiert eine Folge $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\begin{aligned} k_i &= 1 && \text{für } i < i_0 \\ 2 \leq k_{i_0} \leq p^{n_{i_0}} \\ (k_i - 1)p^{n_{i+1}} + 1 &\leq k_{i+1} \leq k_i p^{n_{i+1}} && \text{für } i \geq i_0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

derart, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ genau dann $[a, z_i^{(n)}] \in X$, wenn $n \geq k_i$.

Zur letzten Bedingung von (3.2.1) ist äquivalent:

$$(k_i - 1)p^{n_j + \dots + n_{i+1}} + 1 \leq k_j \leq k_i p^{n_j + \dots + n_{i+1}} \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N} \quad (3.2.2)$$

mit $i_0 \leq i < j$

Sei nun ein beliebiges Element der Form

$$w + X = \gamma_r z_r + \dots + \gamma_1 z_1 + w' + X \in U/X, \quad \gamma_r, \dots, \gamma_1 \in \mathbb{Z}_p, \gamma_r \neq 0, w' \in L'$$

gegeben.

Wir wollen die Ordnung der Abbildung $\text{Rest}_{(U/X), \text{ad}(w+X)}$ abschätzen.

Stets ist 1 eine untere Schranke der Ordnungen.

Man rechnet sofort nach, daß gilt:

$$\text{ord } \text{Rest}_{(U/X), \text{ad}(w+X)} \leq k_r$$

Für $r < i_0$ folgt daraus

$$\text{ord } \text{Rest}_{(U/X), \text{ad}(w+X)} = 1 \quad (3.2.3)$$

Ist $k_r \geq 2$, so erhält man rasch

$$[[a, z_r] + X, (w+X)^{(k_r-2)}] = \gamma_r [a, z_r^{(k_r-1)}] + X \neq 0 + X$$

Das führt zu

$$k_r - 1 \leq \text{ord } \text{Rest}_{(U/X), \text{ad}(w+X)} \leq k_r \quad \text{für alle } r \geq i_0 \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned}\text{Sei nun} \quad O_i &= \text{ord Rest}_{(U/X)} ad(u+X) \\ O_j &= \text{ord Rest}_{(U/X)} ad(v+X)\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $O_i \geq 2$, ist auf jeden Fall $i_0 \leq i$.

Wir zeigen zuerst die eine Richtung der Behauptung.

Sei $j < i$.

Es werden 2 Fälle unterschieden.

a) $i_0 = i$:

Dann ist wegen $j < i$ notwendig $k_j = 1$ und $O_j = 1$.

$$\text{Also} \quad O_i - O_j \geq 2 - 1 = 1 > 0$$

b) $i_0 < i$:

Wegen (3.2.1) und (3.2.2) ist dann $k_i > 2$.

Mit (3.2.4) erhält man so

$$\begin{aligned}O_i - O_j &\geq k_i - 1 - k_j \geq k_i - 1 - (k_i - 1)p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})} - 1 \\ &= (k_i - 1)(1 - p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})}) - 1\end{aligned}$$

Generelle Voraussetzung ist $p > 2$, also $1 - p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})} > \frac{1}{2}$

$$\text{Daher} \quad O_i - O_j > 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\begin{aligned}O_i &= \text{ord Rest}_{(U/X)} ad(z_i + X) \\ O_j &= \text{ord Rest}_{(U/X)} ad(z_j + X)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $i = j$ sofort $O_i = O_j$.

Wir betrachten den letzten Fall: $i < j$

Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} 0_j - 0_i &\geq k_j - 1 - k_i \geq (k_i - 1)p^{n_j + \dots + n_{i+1}} + 1 - k_i \\ &> (k_i - 1)2 + 1 - k_i = k_i - 1 \geq k_{i_0} - 1 > 0 \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 3.2.2 bewiesen.

Weiter werden wir benötigen

Lemma 3.2.3: L_1 und L_2 seien in II.§1. konstruierte Lie-Algebren mit den definierenden Folgen $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

(Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente $a, z_i, i \in \mathbb{N}$, dienen, bei L_2 die Elemente $b, y_i, i \in \mathbb{N}$.)

Für $i = 1, 2$ sei U_i Unteralgebra von L_i , X_i Ideal von U_i derart, daß die U_i Unteralgebren vom Typ 3) sind und

$$U_1/X_1 \cong U_2/X_2$$

(Der Isomorphismus $U_1/X_1 \longrightarrow U_2/X_2$ heiße ϕ .)

Ferner seien Elemente

$$\begin{aligned} u + X_1 &= \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_i z_i + u' + X_1 \in U_1/X_1, \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathbb{Z}_p, \alpha_i \neq 0, u' \in U'_1 \\ v + X_2 &= \beta_j y_j + \dots + \beta_1 y_1 + v' + X_2 \in U_2/X_2, \beta_j, \dots, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p, \beta_j \neq 0, v' \in U'_2 \end{aligned}$$

gegeben mit

$$(u + X_1)\phi = v + X_2$$

$$[a, z_i] \notin X_1, [b, y_j] \notin X_2$$

Dann gilt

$$([a, z_i] + X_1)\phi \sim [b, y_j] + X_2$$

Beweis: Nach Satz 2.4.8 ist $U'_1 = L'_1$ und $U'_2 = L'_2$,

d.h. $(U_1/X_1)' = (L_1/X_1)'$ und $(U_2/X_2)' = (L_2/X_2)'$.

Wir betrachten nun die Mengen

$$I_1 = (U_1/X_1)' \text{ad}(u + X_1)$$

$$J_1 = (U_2/X_2)' \text{ad}(v + X_2)$$

Aus der Kommutativität von $(U_1/X_1)'$ und $(U_2/X_2)'$ folgt, daß die Mengen I_1 und J_1 Ideale von U_1/X_1 bzw. U_2/X_2 sind, für die überdies gilt

$$I_1 \mathcal{G} = J_1$$

Da $[a, z_i] \notin X_1$, d.h. $[a, z_i] + X_1 \neq 0 + X_1$, folgt:

I_1 besteht aus genau denjenigen Elementen $h_1 + X_1 \in (U_1/X_1)'$, für die gilt

$$[a, z_i] + X_1 \sqsubset h_1 + X_1.$$

Sei weiter I ein beliebiges Ideal von U_1/X_1 mit

$$I_1 \subset I \subseteq (U_1/X_1)'$$

Es muß dann ein $h + X_1 \in I$ existieren mit

$$[a, z_i] + X_1 \supseteq h + X_1.$$

Dann aber folgt auch

$$[a, z_i] + X_1 \in I,$$

bzw.

$$\langle [a, z_i] + X_1 \rangle \subseteq I.$$

Da auch

$$I_1 \subset \langle [a, z_i] + X_1 \rangle$$

erhalten wir

$$\begin{array}{c} \text{I}_1 \subset \text{I} \subseteq (\text{U}_1/\text{X}_1)' \\ \text{I} \subseteq \text{U}_1/\text{X}_1 \end{array} \quad \text{I} = \langle [a, z_i] + X_1 \rangle$$

Analog gilt

$$\begin{array}{c} \text{J}_1 \subset \text{J} \subseteq (\text{U}_2/\text{X}_2)' \\ \text{J} \subseteq \text{U}_2/\text{X}_2 \end{array} \quad \text{J} = \langle [b, y_j] + X_2 \rangle$$

Daraus folgt

$$\langle [a, z_i] + X_1 \rangle \mathcal{G} = \langle [b, y_j] + X_2 \rangle$$

Lemma 3.2.1 liefert nun die Behauptung.

w.z.b.w.

Eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.1 ist

Korollar 3.2.1: Es seien die gleichen Voraussetzungen wie bei Lemma 3.2.3 gemacht.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$([a, z_1^{(n)}] + X_1) \sigma \sim [b, y_j^{(n)}] + X_2$$

Damit ausgestattet, können wir einen Satz beweisen, der bei der Lösung des gestellten Problems willkommene Vereinfachungen bringt.

Satz 3.2.1: L_1 und L_2 seien in II.§1. konstruierte Lie-Algebren. Für $i = 1, 2$ sei U_i Unteralgebra von L_i , X_i Ideal von U_i mit

$$\begin{aligned} U_1/X_1 &\cong U_2/X_2 \neq 0 \\ Z(U_1/X_1) &\cong Z(U_2/X_2) = 0. \end{aligned}$$

Dann existieren Lie-Algebren L_3 und L_4 , die nach II.§1. konstruiert wurden, sowie Unteralegebren $U_3 \subseteq L_3$, $U_4 \subseteq L_4$ mit

$$\begin{aligned} U_3 &\cong U_4 \neq 0 \\ Z(U_3) &\cong Z(U_4) = 0. \end{aligned}$$

Die definierenden Folgen von L_1 und L_3 bzw. von L_2 und L_4 besitzen gemeinsame Endstücke.

Beweis: Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente $a, z_i, i \in \mathbb{N}$, dienen, bei L_2 die Elemente $b, y_i, i \in \mathbb{N}$.

Der Isomorphismus $U_1/X_1 \longrightarrow U_2/X_2$ heiße σ .

Die Voraussetzungen über $U_i, X_i, i = 1, 2$, bewirken wie in Lemma 3.2.2, daß die U_i Unteralgebren vom Typ 3), die X_i vom Typ 1) oder 2) sind. Da also $(U_i + L'_i)/L'_i$ nicht endlich erzeugbar ist und Zahlen $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$[a, z_i] \notin X_1 \text{ für alle } i \geq i_0, [b, y_j] \notin X_2 \text{ für alle } j \geq j_0,$$

gibt es Elemente

$$u_1 + X_1 = \alpha_{i_1} z_{i_1} + \dots + \alpha_1 z_1 + X_1 \in U_1/X_1, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_1 \in \mathbb{Z}_p, \alpha_{i_1} \neq 0$$

$$u_2 + X_2 = \beta_{i_2} y_{i_2} + \dots + \beta_1 y_1 + X_2 \in U_2/X_2, \beta_{i_2}, \dots, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p, \beta_{i_2} \neq 0$$

mit

$$(u_1 + X_1)G = u_2 + X_2,$$

$$\text{ord Rest}(U_1/X_1) \cdot \text{ad}(u_1 + X_1) = \text{ord Rest}(U_2/X_2) \cdot \text{ad}(u_2 + X_2) \geq 2$$

und

$$[a, z_{i_1-1}] \notin X_1, [b, y_{i_2-1}] \notin X_2.$$

$$(\text{D.h. u.a. } [a, z_{i_1}] \notin X_1, [b, y_{i_2}] \notin X_2.)$$

Wir betrachten die Ideale

$$Y_1 = \langle [a, z_{i_1}^{(p^{n_{i_1}} - 1)}], z_i \mid i \in \mathbb{N}, i < i_1 \rangle \subseteq L_1$$

$$Y_2 = \langle [b, y_{i_2}^{(p^{m_{i_2}} - 1)}], y_i \mid i \in \mathbb{N}, i < i_2 \rangle \subseteq L_2$$

und die Faktoralgebren

$$L_3 = L_1/Y_1$$

$$L_4 = L_2/Y_2$$

Nach Satz 3.1.3 sind L_3 und L_4 Lie-Algebren, wie sie in II.§1. konstruiert wurden. Ihre definierenden Folgen haben gemeinsame Endstücke mit den definierenden Folgen von L_1 und L_2 .

Auf Grund des Baus von X_1 und X_2 , wie er im Beweis von Lemma 3.2.2 beschrieben wurde, ergibt sich

$$X_1 \subseteq Y_1, X_2 \subseteq Y_2$$

Wir wollen nachweisen, daß

$$(Y_1/X_1 \cap U_1/X_1)G = Y_2/X_2 \cap U_2/X_2 .$$

Nach Korollar 3.2.1 ist

$$([a, z_{i_1}^{(p^{n_{i_1}} - 1)}] + X_1)G = [b, y_{i_2}^{(p^{m_{i_2}} - 1)}] + X_2 .$$

Sei

$$\begin{aligned} u + X_1 &= \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_i z_i + u' + X_1 \in U_1/X_1, \gamma_1, \dots, \gamma_i \in \mathbb{Z}_p, \gamma_i \neq 0, u' \in L'_1 \\ v + X_2 &= \delta_j y_j + \dots + \delta_1 y_1 + v' + X_2 \in U_2/X_2, \delta_j, \dots, \delta_1 \in \mathbb{Z}_p, \delta_j \neq 0, v' \in L'_2 \\ (u + X_1)G &= v + X_2 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.2 ist $i < i_1$ genau dann, wenn $j < i_2$.

Daraus folgt, wie verlangt,

$$(Y_1/X_1 \cap U_1/X_1)G = Y_2/X_2 \cap U_2/X_2 .$$

Sei

$$\begin{aligned} U_3 &= U_1/X_1 / (Y_1/X_1 \cap U_1/X_1) \\ U_4 &= U_2/X_2 / (Y_2/X_2 \cap U_2/X_2) \end{aligned}$$

Dann ist offenbar

$$U_3 \cong U_4 .$$

Vermöge

$$\begin{aligned} U_3 &\subseteq L_1/X_1 / Y_1/X_1 \cong L_1/Y_1 = L_3 \\ U_4 &\subseteq L_2/X_2 / Y_2/X_2 \cong L_2/Y_2 = L_4 \end{aligned}$$

lassen sich U_3 in L_3 und U_4 in L_4 isomorph einbetten.

Es ist klar, daß

$$U_3 \cong U_4 \neq 0 .$$

Da offenbar auch $(U_3 + L'_3)/L'_3$ und $(U_4 + L'_4)/L'_4$ nicht endlich erzeugbar sind, folgt nach Satz 2.4.9

$$Z(U_3) \cong Z(U_4) = 0 .$$

Satz 3.2.1 ist damit bewiesen.

Wir sind jetzt imstande, unser erstes wichtiges Ergebnis beweisen zu können.

Satz 3.2.2: L_1 und L_2 seien in II.§1. konstruierte Lie-Algebren. U_1 sei Unteralgebra von L_1 , U_2 Unteralgebra von L_2 mit

$$U_1 \cong U_2 \neq 0 \\ Z(U_1) \cong Z(U_2) = 0 .$$

Dann besitzen die definierenden Folgen von L_1 und L_2 gemeinsame Endstücke.

Beweis: Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente $a, z_i, i \in \mathbb{N}$, dienen, bei L_2 die Elemente $b, y_i, i \in \mathbb{N}$.

Der Isomorphismus $U_1 \longrightarrow U_2$ heiße ϕ .

ϕ induziert einen Isomorphismus $\tau: A_{U_1} \longrightarrow A_{U_2}$.

Anmerkung: Die entscheidenden Kalkulationen werden wir in A_{U_1} und A_{U_2} ausführen. Für jedes $x \in L_1$ bezeichnet $\text{ad } x$ die innere Derivation von L_1 . Ist überdies $x \in U_1$, so bezeichnen wir mit $\text{ad}'x$ die innere Derivation von U_1 , d.h.

$$\text{ad}'x = \text{Rest}_{U_1} \text{ad } x \quad \text{für alle } x \in U_1 .$$

Nach Lemma 2.4.2 wissen wir überdies, daß

$$\text{Rest}_{U_1} \text{ad } x \in A_{U_1} \quad \text{für alle } x \in L_1 .$$

Entsprechend sei in U_2

$$\text{ad}'y = \text{Rest}_{U_2} \text{ad } y \quad \text{für alle } y \in U_2$$

und es gilt $\text{Rest}_{U_2} \text{ad } y \in A_{U_2}$ für alle $y \in L_2$.

Wir wissen bereits, daß $(U_1+L'_1)/L'_1$ und $(U_2+L'_2)/L'_2$ nicht endlich erzeugbar sein können. Deshalb existieren eine streng monoton wachsende Folge $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$u_{i_n} = \alpha_{n,i_n} z_{i_n} + \dots + \alpha_{n,1} z_1 + p_n \in U_1$$

$$v_{j_n} = \beta_{n,j_n} y_{j_n} + \dots + \beta_{n,1} y_1 + q_n \in U_2$$

$$\alpha_{n,i_n}, \dots, \alpha_{n,1}, \beta_{n,j_n}, \dots, \beta_{n,1} \in \mathbb{Z}_p, \alpha_{n,i_n}, \beta_{n,j_n} \neq 0, p_n \in L'_1, q_n \in L'_2$$

$$u_{i_n} \in U_2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die letzte Gleichung bedeutet

$$\text{ord Rest}_{U_1} \text{ad}' u_{i_n} = \text{ord Rest}_{U_2} \text{ad}' v_{j_n}.$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeit mit Hilfe von (2.4.1)

$$\text{ord Rest}_{U_1} \text{ad}' u_{i_n} = p^{n_{i_n} + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1),$$

$$\text{ord Rest}_{U_2} \text{ad}' v_{j_n} = p^{m_{j_n} + \dots + m_2} (p^{m_1} - 1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Einmal ergibt sich aus diesen Beziehungen, daß die Folge $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist. Weiter beweisen sie die Gültigkeit folgender Identitäten:

$$\begin{aligned} p^{n_{i_1} + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1) &= p^{m_{j_1} + \dots + m_2} (p^{m_1} - 1), \\ p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{i_r+1}} &= p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{j_r+1}} \\ \text{bzw. } n_{i_{r+1}} + \dots + n_{i_r+1} &= m_{j_{r+1}} + \dots + m_{j_r+1} \\ &\text{für alle } r \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Diese ersten Gleichungen über die definierenden Folgen von L_1 und L_2 sollen noch weiter präzisiert werden.

Das geschieht durch nachstehende Definitionen.

Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ existiert ein maximales $k_r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n_{i_r+k} = m_{j_r+k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_r,$$

$$\text{und } i_r+k_r \leq i_{r+1}, j_r+k_r \leq j_{r+1}.$$

Wir setzen $s_r = i_r + k_r, t_r = j_r + k_r$

Zieht man (3.2.5) heran, so erkennt man, daß $s_r = i_{r+1}$ offenbar genau dann, wenn $t_r = j_{r+1}$. Es kann auch nicht zugleich $s_r = i_{r+1} - 1$ und $t_r = j_{r+1} - 1$ sein, da, wieder nach (3.2.5), dann $n_{i_{r+1}} = m_{j_{r+1}}$ wäre, im Widerspruch zur Maximalität von k_r .

Wir haben also für $s_r < i_{r+1}$, d.h. $t_r < j_{r+1}$, und nur dieser Fall wird für uns interessant sein, :

$$\begin{aligned} n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+1}} &= m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_{r+1}} \\ n_{i_r+k} &= m_{j_r+k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \leq k_r \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Weiter

$$\begin{aligned} 1 &\neq p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_{r+2}}} && \text{für } s_r = i_{r+1} - 1 \\ p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+2}}} &\neq 1 && \text{für } t_r = j_{r+1} - 1 \\ p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+2}}} &\neq p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_{r+2}}} && \text{sonst} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} E_r &= p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_{r+2}}} (p^{m_{t_{r+1}}} - 1) && \text{für } s_r = i_{r+1} - 1 \\ E_r &= p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+2}}} (p^{n_{s_{r+1}}} - 1) && \text{für } t_r = j_{r+1} - 1 \\ E_r &= \min \left\{ p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+2}}} (p^{n_{s_{r+1}}} - 1), \right. && \\ &\quad \left. p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_{r+2}}} (p^{m_{t_{r+1}}} - 1) \right\} && \text{sonst} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Wenn wir setzen

$$\begin{aligned} N_r &= n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_{r+2}} && \text{für } s_r < i_{r+1} - 1 \\ N_r &= 0 && \text{für } s_r = i_{r+1} - 1 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} M_r &= m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_r+2} & \text{für } t_r < j_{r+1} - 1 \\ M_r &= 0 & \text{für } t_r = j_{r+1} - 1 \end{aligned} \quad (3.2.9')$$

haben wir wegen (3.2.7) zunächst

$$p^{N_r} (p^{n_{j_{r+1}}} - 1) \neq p^{M_r} (p^{m_{t_r+1}} - 1) \quad (3.2.10)$$

Diese Ungleichung wird noch eine entscheidende Rolle spielen.

Ferner lassen sich die 3 Fälle von (3.2.8) zusammenfassen zu

$$E_r = \min \left\{ p^{N_r} (p^{n_{j_{r+1}}} - 1), p^{M_r} (p^{m_{t_r+1}} - 1) \right\} \quad (3.2.11)$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir zum Kern des Beweises kommen.

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen also an, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke.

Dann ist $s_r < i_{r+1}$ für unendlich viele $r \in \mathbb{N}$.

Es wird sich zeigen, daß dann Widersprüche unvermeidlich sind.

Aus
$$u_{i_1} \sigma = v_{j_1}$$

folgt
$$\text{ad}' u_{i_1} \tau = \text{ad}' v_{j_1}$$

Daraus ergibt sich, wie man leicht nachrechnet,

$$\begin{aligned} \text{Rest}_{U_1} \text{ad } z_{i_1} \tau &= \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_1, k} \text{Rest}_{U_2} (\text{ad } v_{j_1})^{p^k} + \text{ad}' g_{i_1} \\ \gamma_{i_1, k} &\in \mathbb{Z}_p, \gamma_{i_1, 0} \neq 0; g_{i_1} \in L_2' \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Weiter existiert ein $r_1 \geq j_1$ mit

$$g_{i_1} = \sum_{k \geq 1} \delta_{i_1, k} [b, y_{r_1}^{(k)}], \quad \delta_{i_1, k} \in \mathbb{Z}_p \quad (3.2.12')$$

und
$$[a, z_{i_1}] \sigma = \sum_{k \geq 1} \vartheta_{i_1, k} [b, y_{r_1}^{(k)}], \quad \vartheta_{i_1, k} \in \mathbb{Z}_p \quad (3.2.13)$$

Wir werden sehen, daß die notwendige Existenz einer solchen Zahl r_1 mit der Annahme, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke, kollidiert.

Unter dieser Annahme existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$r_1 < t_1 < j_{l+1}$$

Analog zu (3.2.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{i_{l+1}} \tau &= \sum_{k \geq 0} j_{i_{l+1}, k}^* \text{Rest}_{U_2} \text{ ad } y_{j_{l+1}} p^k + \text{ad}' g_{i_{l+1}} \\ j_{i_{l+1}, k} &\in \mathbb{Z}_p, \quad j_{i_{l+1}, 0} \neq 0, \quad g_{i_{l+1}} \in L_2' \end{aligned}$$

Mit (3.2.6) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{i_{l+1}} p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{s_{l+1}}} \tau &= \\ &= \sum_{k \geq 0} j_{i_{l+1}, k}^* \text{Rest}_{U_2} \text{ ad } y_{j_{l+1}} p^{k + m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_{l+1}}} + \text{ad}' h_{i_{l+1}} \\ &\quad h_{i_{l+1}} \sim [g_{i_{l+1}}, y_{j_{l+1}} (p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_{l+1}}} - 1)] \end{aligned}$$

Nach (2.1.3), Korollar 3.2.1, (3.2.9) und (3.2.9') hat man nun

$$\begin{aligned} \text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{s_1} \tau &= \\ &= \sum_{k \geq 0} j_{i_{l+1}, k}^* \text{Rest}_{U_2} \text{ ad } y_{t_1} p^k + \text{ad}' h_{i_{l+1}} + \text{ad}' d_1 + \text{ad}' d_2 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &\sim [b, y_{j_{l+1}} (p^{N_{t_1}} (p^{n_{s_{l+1}}} - 1))] \\ d_2 &\sim [b, y_{j_{l+1}} (p^{M_{t_1}} (p^{m_{t_{l+1}}} - 1))] \end{aligned}$$

Man sieht, daß $d_1 \subset h_{i_{l+1}}$, $d_2 \subset h_{i_{l+1}}$

Die Beziehung (3.2.11) liefert dann (vgl. Anmerkung (3.2.10)) :

$$\text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{s_1} \tau = \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_{l+1}, k} \text{Rest}_{U_2} \text{ ad } y_{t_1} p^k + \text{ad}' g_{s_1} \quad (3.2.14)$$

$$\text{mit} \quad g_{s_1} \sim [b, y_{j_{l+1}}^{(E_\ell)}] \quad , \quad \gamma_{i_{l+1}, 0} \neq 0$$

Nachdem wir jetzt in (3.2.14) eine Formel für $\text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{s_1} \tau$ haben, werden wir $\text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{i_1} \tau$ durch $\text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{s_1} \tau$ ausdrücken. Es wird sich zeigen, daß dieses Ergebnis mit den Formeln (3.2.12) und (3.2.12') für $\text{Rest}_{U_1} \text{ ad } z_{i_1} \tau$ nicht zu vereinbaren ist. Dies wird der gewünschte Widerspruch sein.

Im wesentlichen werden wir also mit (2.1.3) den Ausdruck

$$\text{Rest}_{U_1} (\text{ad } z_{i_1} - \text{ad } z_{s_1}^{n_{s_\ell} + \dots + n_{i_{l+1}}}) \tau$$

zu berechnen haben. Das bedeutet, daß wir zunächst über den Term $[a, z_{s_\ell}]_G$ Informationen gewinnen müssen, die über den Inhalt von Korollar 3.2.1 beträchtlich hinausgehen.

Nach Korollar 3.2.1 ist

$$[a, z_{i_{l+1}}^{(k)}]_G \sim [b, y_{j_{l+1}}^{(k)}]$$

Da nach (3.2.6) $n_{i_{\ell+1}} + \dots + n_{s_{\ell+1}} = m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}$, folgt

$$\begin{aligned} [a, z_{s_1}]_G &= [a, z_{i_{l+1}}^{(p^{n_{i_{\ell+1}} + \dots + n_{s_{\ell+1}}})}]_G \sim \\ &\sim [b, y_{j_{l+1}}^{(p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}})}] = [b, y_{t_1}] \end{aligned}$$

Das Element $[a, z_{s_1}]_G$ läßt sich dann auf die folgende Normalform bringen :

$$\begin{aligned} [a, z_{s_1}]_G &= \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k [b, y_{t_1}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq k_0} \zeta_k [b, y_{t_1}, y_{j_{l+1}}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq 1} \eta_k [b, y_{r_1}^{(k)}] \end{aligned}$$

Dabei soll gelten: $\varepsilon_1, \zeta_{k_0} \neq 0$, $j_{l+1} < r_1$,

$$k_0 \not\equiv 0 \pmod{p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}} + 1}},$$

$$\eta_k \neq 0 \text{ höchstens für } k \not\equiv 0 \pmod{p^{m_{r_{\ell}} + \dots + m_{j_{\ell+1}} + 1}}.$$

Die Möglichkeit, daß $[b, y_{t_1}, y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] = 0$, ist nicht ausgeschlossen.

Zunächst soll eine Abschätzung für k_0 angegeben werden.

Wegen (3.2.14) ist

$$\begin{aligned} [a, z_{i_1}]_G &= [a, z_{s_1}, z_{s_1}^{(p^{n_{s_{\ell}} + \dots + n_{i_{\ell+1}}} - 1)}]_G = \\ &= \sum_{k \geq 1} \varepsilon'_k [b, y_{t_1}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq k_0} \zeta'_k [b, y_{j_1}, y_{j_{l+1}}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq 1} \eta'_k [b, y_{r_1}^{(k)}] \end{aligned}$$

$$\zeta'_{k_0} \neq 0, \eta'_k \neq 0 \text{ höchstens für } k \not\equiv 0 \pmod{p^{m_{r_{\ell}} + \dots + m_{j_{\ell+1}} + 1}}$$

Damit nicht schon jetzt ein Widerspruch mit (3.2.13) entsteht,

muß wegen $\zeta'_{k_0} \neq 0$, $r_1 < t_1 < j_{l+1}$ und $k_0 \not\equiv 0 \pmod{p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}} + 1}}$

gelten :

$$[b, y_{j_1}, y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] = [b, y_{j_{l+1}}^{(m_{j_{l+1}} + \dots + m_{j_1} + k_0)}] = 0$$

Das bedeutet

$$k_0 + p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{j_1}} \geq p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_2} (p^{m_1} - 1)$$

bzw. wegen (3.2.5)

$$\begin{aligned} k_0 + p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_1}} &\geq p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1) \\ k_0 &\geq p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_2} (p^{n_1} - 1) - p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_1}} \geq \\ &\geq 2p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_2} - p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_1}} \geq \\ &\geq p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_2} > p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_q+2}} > \\ &> p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_q+2}} + E_1 - p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}} \end{aligned}$$

Unter nochmaliger Verwendung von (3.2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} k_0 + p^{n_{i_{l+1}} + \dots + n_{i_q+2}} (p^{n_{i_q+1}} - 1) &> \\ > E_1 + p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{j_q+1}} - p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Wir wenden uns nun dem aufgezeigten Ziel zu,

$$\begin{aligned} P &= \text{Rest}_{U_1} (\text{ad } z_{i_1} - \text{ad } z_{s_1}^{p^{n_{s_{\ell}} + \dots + n_{i_q+1}}}) \tau = \\ &= -\text{ad}'([a, z_{s_1}^{(p^{n_{s_{\ell}} + \dots + n_{i_q+1}} - p^{n_{s_{\ell}} + \dots + n_{i_q+2}})}]) + \dots \\ &\quad \dots + [a, z_{s_1}^{(p^{n_{s_{\ell}} + \dots + n_{i_q+1}} - 1)}]) \tau \end{aligned}$$

zu berechnen.

Für jedes $k > 1$ ist

$$\begin{aligned} \text{ad}'[a, z_{s_1}^{(k)}] \tau &= (\text{ad}'([a, z_{s_1}] \text{Rest}_{U_1} \text{ad } z_{s_1}^{k-1})) \tau = \\ &= \text{ad}'([a, z_{s_1}] \in (\text{Rest}_{U_1} \text{ad } z_{s_1} \tau)^{k-1}) \end{aligned}$$

Das führt mit (3.2.14) auf

$$P = \sum_{k \geq 1} \varphi_k \operatorname{ad}' [b, y_{t_1}^{(k)}] + \sum_{k \geq 1} \mu_k \operatorname{ad}' [b, y_{r_1}^{(k)}] + \operatorname{ad}' d_{i_1, s_1}$$

$$d_{i_1, s_1} \sim [b, y_{t_1}^{(p^{n_{s_\ell} + \dots + n_{i_1+1}} - p^{n_{s_\ell} + \dots + n_{i_1+2}}), y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] \quad (3.2.16)$$

$$\varphi_k, \mu_k \in \mathbb{Z}_p, \mu_k \neq 0 \text{ höchstens für } k \neq 0 \text{ (} p^{m_{r_\ell} + \dots + m_{j_{\ell+1}+1}} \text{)}$$

(2.1.3), (3.2.5) und (3.2.14) bewirken

$$\begin{aligned} \operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{s_1} \tau^{p^{n_{s_\ell} + \dots + n_{i_1+1}}} &= \\ &= \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_{l+1}, k} \operatorname{Rest}_{U_2} \operatorname{ad} y_{t_1}^{p^{k+m_{t_\ell} + \dots + m_{j_{\ell+1}}}} + \operatorname{ad}' h_{s_1} = \\ &= \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_{l+1}, k} (\operatorname{Rest}_{U_2} \operatorname{ad} y_{t_1}^{p^{m_{t_\ell} + \dots + m_{j_{\ell+1}}}})^{p^k} + \operatorname{ad}' h_{s_1} = \\ &= \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_{l+1}, k} \operatorname{Rest}_{U_2} \operatorname{ad} y_{j_1}^{p^k} + \sum_{k \geq 1} \gamma_k \operatorname{ad}' [b, y_{t_1}^{(k)}] + \\ &\quad + \operatorname{ad}' h_{s_1} \\ \gamma_k \in \mathbb{Z}_p, h_{s_1} &\sim [b, y_{t_1}^{(p^{m_{t_\ell} + \dots + m_{j_{\ell+1}}+1} - 1), y_{j_{l+1}}^{(E_\ell)}] \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Berücksichtigt man (3.2.15), so erhält man

$$h_{s_1} \subseteq d_{i_1, s_1} \quad (3.2.18)$$

(3.2.16), (3.2.17) und (3.2.18) ergeben zusammen schließlich

$$\begin{aligned} \operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{i_1} \tau &= \sum_{k \geq 0} \gamma_{i_{l+1}, k} \operatorname{Rest}_{U_2} \operatorname{ad} y_{j_1}^{p^k} + \\ &+ \sum_{k \geq 1} (\gamma_k + \varphi_k) \operatorname{ad}' [b, y_{t_1}^{(k)}] + \\ &+ \sum_{k \geq 1} \mu_k \operatorname{ad}' [b, y_{r_1}^{(k)}] + \operatorname{ad}' h_{i_1, s_1}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

wobei für h_{i_1, s_1} gilt

$$h_{i_1, s_1} \sim [b, y_{t_1}^{(p^{m_{t_\ell} + \dots + m_{j_{i_1} + 1} - 1}), y_{j_{i_1} + 1}^{(E_\ell)}]$$

Wir haben jetzt das gesteckte Ziel erreicht, für Rest_{U_1} ad $z_{i_1} \tau$ zwei auf verschiedenen Wegen erhaltene Darstellungen zu haben.

Vergleicht man (3.2.12) und (3.2.12') mit (3.2.19), so erkennt man, daß

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k \geq 0} (\gamma_{i_1+1, k} - \gamma_{i_1, k}) \text{Rest}_{U_2} \text{ad } y_{j_1} p^k \\ &- \sum_{k \geq 1} \delta_{i_1, k} \text{ad}' [b, y_{r_1}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq 1} (\gamma_k + \vartheta_k) \text{ad}' [b, y_{t_1}^{(k)}] \\ &+ \sum_{k \geq 1} \mu_k \text{ad}' [b, y_{r_1}^{(k)}] + \text{ad}' h_{i_1, s_1} \end{aligned}$$

die Nullabbildung ist.

Hieraus folgt weiter, daß auch $[D, \text{Rest}_{U_2} \text{ad } y_{j_1}]$ die Nullabbildung ist.

Da $Z(U_2) = 0$ ist, folgt aus $\text{ad}' u = 0$ notwendig $u = 0$.

In unserem Fall führt das zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \geq 1} (\gamma_k + \vartheta_k) [b, y_{t_1}^{(k)}, y_{j_1}] \\ &+ \sum_{k \geq 1} \mu_k [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] \\ &- \sum_{k \geq 1} \delta_{i_1, k} [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] + [h_{i_1, s_1}, y_{j_1}] \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

In dieser Gleichung gilt:

$$[h_{i_1, s_1}, y_{j_1}] \sim [b, y_{j_{i_1} + 1}^{(C)}]$$

mit $C = E_1 + p^{m_{j_{i_1} + 1} + \dots + m_{t_\ell} + 1} (p^{m_{t_\ell} + \dots + m_{j_{i_1} + 1} - 1}) + p^{m_{j_{i_1} + 1} + \dots + m_{j_{i_1} + 1}}$

Man hat $C < 2p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{j_1+1}} \leq p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_2} (p^{m_1} - 1)$.

Daraus folgt $[b, y_{j_{1+1}}^{(C)}] \neq 0$

Weiter ist für alle $k \in \mathbb{N}$

$$kp^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{r_1+1}} + p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{i_1+1}} \equiv 0 \pmod{p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}+1}}$$

$$kp^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}+1} + p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{j_1+1}} \equiv 0 \pmod{p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}+1}}$$

$$C \equiv E_1 \not\equiv 0 \pmod{p^{m_{j_{\ell+1}} + \dots + m_{t_{\ell+1}}+1}}$$

Daraus folgt

$$[b, y_{j_{1+1}}^{(C)}] \neq [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

$$[b, y_{j_{1+1}}^{(C)}] \neq [b, y_{t_1}^{(k)}, y_{j_1}] \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Da $\mu_k \neq 0$ höchstens für $k \neq 0 \pmod{p^{m_{r_{\ell}} + \dots + m_{i_{\ell+1}}+1}}$ war, ist ferner

$$[b, y_{j_{1+1}}^{(C)}] \neq \mu_k [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] \text{ für alle } k \in \mathbb{N}$$

Damit aber ergibt sich, daß Gleichung (3.2.20) falsch ist.

Wir haben so den gewünschten Widerspruch erreicht. Die Annahme, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke, ist nicht haltbar.

Satz 3.2.2 ist damit bewiesen.

Satz 1.2.7, Satz 3.2.1 und Satz 3.2.2 lassen sich zusammenfassen in

Satz 3.2.3: L_1 und L_2 seien in II.§1. konstruierte Lie-Algebren. Wenn $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung erfüllt, besitzen die definierenden Folgen von L_1 und L_2 gemeinsame Endstücke.

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig.

Satz 3.2.4: Wenn die definierenden Folgen zweier in II.§1. konstruierter Lie-Algebren L_1, L_2 gemeinsame Endstücke besitzen, erfüllt $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung.

Beweis: Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dann existieren Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n_{c_1+i} = m_{c_2+i} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Sei L die durch die Folge $\{n_{c_1+i}\}_{i \in \mathbb{N}} = \{m_{c_2+i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ definierte Lie-Algebra über $\mathbb{Z}_p$.

Nach Satz 3.1.3 existieren Ideale X_1 von L_1 und X_2 von L_2 mit

$$L_1/X_1 \cong L_2/X_2 \cong L.$$

Da $L \neq 0$ und $Z(L) = 0$, liefert Satz 1.2.7 die Behauptung.

Wir können das Erreichte zusammenfassen:

Das direkte Produkt zweier Lie-Algebren, die nach II.§1. über $\mathbb{Z}_p$ konstruiert sind, erfüllt genau dann die Idealisatorbedingung, wenn die definierenden Folgen der Lie-Algebren keine gemeinsamen Endstücke besitzen.

Wir wollen schließlich noch untersuchen, ob etwa ein direktes Produkt von Lie-Algebren zu einer der ursprünglich konstruierten Algebren isomorph sein kann und wann direkte Produkte untereinander isomorph sind.

Dazu haben wir

Satz 3.2.5: Die in II.§1. konstruierten Lie-Algebren sind unzerlegbar.

Beweis: L sei eine beliebige der konstruierten Lie-Algebren.

Angenommen, es existiere eine direkte Zerlegung

$$L = H_1 \times H_2, \quad H_1 \neq 0, H_2 \neq 0$$

Da $Z(L) = 0$, muß auch $Z(H_1) = Z(H_2) = 0$ sein.

Also ist $(H_1 + L')/L'$ und $(H_2 + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar und nach Satz 2.4.6 folgt $L' \subseteq H_1, L' \subseteq H_2$.

D.h. $L' \subseteq H_1 \cap H_2 \neq 0$

Wir haben einen Widerspruch und der Satz ist bewiesen.

Damit haben wir zunächst gewonnen, daß für Lie-Algebren L_1, L_2, L_3 aus II.§1. niemals gelten kann

$$L_1 \cong L_2 \times L_3.$$

Seien nun vier Lie-Algebren L_1, L_2, L_3, L_4 aus II.§1. gegeben und sei

$$L_1 \times L_2 \cong L_3 \times L_4.$$

Dann folgt nach dem Satz von REMAK-SCHMIDT-FITTING entweder

$$L_1 \cong L_3, \quad L_2 \cong L_4$$

oder $L_1 \cong L_4, \quad L_2 \cong L_3$

Ein Beweis hierfür soll noch angegeben werden.

Der Isomorphismus $L_1 \times L_2 \longrightarrow L_3 \times L_4$ heiße φ .

Es gilt $L_1\varphi \subseteq L_3 \times L_4$ und $L_2\varphi \subseteq L_3 \times L_4$. Mit den Bezeichnungen aus I.2. ergibt sich $L_1\varphi\pi_3 \subseteq L_3$, $L_2\varphi\pi_3 \subseteq L_3$. Da φ surjektiv ist, hat man weiter $(L_1\varphi\pi_3, L_2\varphi\pi_3) = L_3$.

Sei ein beliebiges Element $u \in L_1\varphi\pi_3 \cap L_2\varphi\pi_3$ gegeben.

Dann existieren Elemente $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$ mit $u = u_1\varphi\pi_3 = u_2\varphi\pi_3$.

Sei weiter $x \in L_1\varphi\pi_3$ beliebig. Es existiert ein $x_1 \in L_1$ mit $x = x_1\varphi\pi_3$. Dann gilt

$$[x, u] = [x_1\varphi\pi_3, u_2\varphi\pi_3] = [x_1\varphi, u_2\varphi]\pi_3 = [x_1, u_2]\varphi\pi_3 = 0$$

D.h. $u \in Z(L_1\varphi\pi_3)$. Analog erhält man $u \in Z(L_2\varphi\pi_3)$.

Damit ergibt sich $u \in Z((L_1\varphi\pi_3, L_2\varphi\pi_3)) = Z(L_3)$.

Wegen $Z(L_3) = 0$ ist daher $L_1\varphi\pi_3 \cap L_2\varphi\pi_3 = 0$ und

$$L_3 = L_1\varphi\pi_3 \times L_2\varphi\pi_3.$$

Da L_3 unzerlegbar ist, muß wenigstens eines der Ideale $L_1\varphi\pi_3$ und $L_2\varphi\pi_3$ das Nullideal sein.

Analog ergibt sich, daß wenigstens eines der beiden Ideale $L_1\varphi\pi_4$ und $L_2\varphi\pi_4$ Nullideal sein muß.

Nehmen wir an $L_1\varphi\pi_3 = 0$,

so folgt $L_1\varphi = L_1\varphi\pi_4 \subseteq L_4$.

Daraus ergibt sich $L_2\varphi\pi_4 = 0$, d.h. $L_2\varphi \subseteq L_3$.

Da $L_1\varphi \times L_2\varphi = L_3 \times L_4$, folgt $L_1\varphi = L_4$, $L_2\varphi = L_3$.

Wenn $L_2\varphi\pi_3 = 0$ wäre, folgte entsprechend $L_1\varphi = L_3$,

$$L_2\varphi = L_4.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Jacobson, N. "Lie Algebras." Interscience Publishers, New York - London - Sydney, 1962.
- [2] Seligman, G.B. "Modular Lie Algebras." Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1967.
- [3] Specht, W. "Gruppentheorie." Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1956.
- [4] Kurosh, A.G. "Theory of Groups." English transl. from the second Russian edition, (Chelsea, ed.), New York, 1961.
- [5] Heineken, H., and Mohamed, I.J. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition, Journal of Algebra 10 (1968), 368 - 376.
- [6] Zassenhaus, H. Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 13 (1939), 1 - 100.
- [7] Kurosh, A.G., and Černikov, S.N. Solvable and nilpotent groups, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 2, No. 3 (19), 18 - 59, (1947). [English transl.: Amer. Math. Soc. Translations series 1, 1, 283 - 338.]

L e b e n s l a u f

Walther Friedrich Unsin ,

geboren am 1. Januar 1945 in Nesselwang als Sohn des
Franz Unsin und seiner Ehefrau Hildegard , geb. Pöppl.

- 1951 - 1955 Besuch der Volksschule in Nürnberg
1955 - 1964 Besuch des humanistischen Neuen Gymnasiums
zu Nürnberg
1964 Abitur an dieser Schule
1964 - 1969 Studium der Mathematik und Physik an der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-
Nürnberg
1966 Vorprüfung für das Lehramt an den Gymnasien
in Bayern
1969 Hauptprüfung für das Lehramt an den Gymnasien
in Bayern

Seit 2. Februar 1970 Studienreferendar am Hans-Sachs-Gym-
nasium Nürnberg

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990